Mesure de la contribution d'un actif au risque financier d'un portefeuille

Mélanie Langlois

Août 2003

Résumé

Après une introduction de la notion de risque financier dans le contexte de marchés d'actions, nous montrerons que la variance est une bonne mesure du risque d'un actif unique détenu isolément. Nous montrerons ensuite que dans le cas d'un portefeuille composé de plusieurs actifs, la variance n'est plus une mesure appropriée de la contribution d'un actif au risque financier d'un portefeuille et qu'il faut plutôt considérer la covariance des taux de rentabilité de l'actif et du portefeuille contenant cet actif. Finalement nous expliquerons comment il est possible d'utiliser cette mesure du risque pour établir des critères permettant de choisir les actifs constituant un portefeuille.

1 Le risque financier

Ce qui est à venir, ce qui n'existe pas encore, le futur, est incertain. Il est ainsi car l'environnement dans lequel nous évoluons est un système dont la dynamique repose sur un nombre considérable de facteurs qu'il est difficile d'identifier et dont les influences sur le système sont d'autant plus difficiles à évaluer.

Pour les entreprises cette incertitude du futur se fonde par exemple sur l'évolution des taux d'intérêts, l'évolution des cours boursiers ou encore sur les taux de change des devises utilisées dans les opérations courantes. D'après [7], ces facteurs d'incertitude peuvent entraîner :

- Des variations sur le résultat global après règlement des intérêts et des impôts ;
- Des variations sur le résultat d'exploitation liées à l'activité industrielle et commerciale ;
- Des variations sur le résultat financier liées aux opérations de financement, de placement et de change ;
- Un déséquilibre entre liquidité et dettes exigibles et éventuellement une crise de solvabilité.

Ainsi, dans le système économique au sein duquel évoluent les entreprises, le risque peut être défini comme suit [1] :

> *Un risque correspond à l'occurrence d'un fait imprévisible - ou à tout le moins incertain - susceptible d'affecter les membres, le patrimoine, l'activité de l'entreprise et de modifier son patrimoine et ses résultats.*

Selon cette définition, il est donc possible d'associer à chacun des facteurs d'incertitude mentionnés plus haut un type de risques. Par exemple, l'on peut dire que les facteurs précédents sont respectivement sources de risques globaux, de risques d'exploitation, de risques financiers et de risques de faillite. Le risque est alors catégorisé et il est raisonnable de penser qu'il est possible de trouver pour chacune des catégories des moyens pour quantifier le risque mais aussi pour s'en protéger. En fait, comme le décrit [7], la dynamique suivie par les entreprises et les investisseurs par rapport au risque se déroule en trois phases : la prise de conscience, la prise de position et la résolution.

Ces trois phases, qui décrivent l'évolution d'un risque quelconque vis-à-vis des entreprises et des investisseurs, peuvent être détaillées comme suit :

Phase 1 : La prise de conscience du risque
Les entreprises et les investisseurs identifient un risque pouvant affecter la position d'une entreprise sur le marché.

Phase 2 : La prise de position vis-à-vis du risque identifié
Les entreprises et les investisseurs adoptent l'une des deux attitudes suivantes :

a. Recherche de moyens de se garantir du risque et mise en place des dispositions nécessaires pour s'en protéger.

b. Adoption de la position risquée afin de tenter de tirer avantage du risque, autrement dit retard de la mise en place des moyens permettant de contrôler le risque dans le cas où une maîtrise du risque est possible.

Phase 3 : La résolution du risque
Le risque est réduit et maîtrisé, ou encore, il y a spéculation et éventuellement déclenchement d'une crise, comme l'éclatement d'une bulle spéculative, dans laquelle se résout le risque.

Le choix des entreprises et des investisseurs entre l'une des deux attitudes proposées à la phase 2, dépend de leur degré d'aversion au risque. Ce degré d'aversion au risque est un critère individuel mais dans tous les cas cette aversion au risque a une influence sur la stratégie financière de chacun. Dans le contexte des marchés financiers, l'objectif que poursuivent les investisseurs est sans nul doute d'obtenir une forte rentabilité pour tout placement. Pour certains placements, par exemple un placement en obligations à 8%, le taux de rentabilité peut être évalué avec une très bonne précision. Toutefois ce n'est pas le cas en général de placements en actions, où le taux de rentabilité du placement dépend alors de l'évolution des marchés et est donc incertain.

Le risque d'un actif financier peut se définir [4] comme étant :

L'incertitude qui existe quant à la valeur du même actif à une date future.

Pour un actif financier, sa valeur à une date ultérieur à la date du placement peut être inférieure, égale ou supérieure à sa valeur à la date du placement, auquel cas l'investisseur réalise respectivement une moins-value, aucun gain ni aucune perte ou une plus-value.

Dans le cas d'une moins-value, le taux de rentabilité est inférieur au taux de rentabilité espéré pour le placement et l'investisseur réalise une perte.

Le risque financier est donc un risque de moins-value sur un résultat anticipé.

Ce risque étant présent, les investisseurs sont donc contraints d'en tenir compte dans leur stratégie de placement et donc dans le choix des actifs constituant leurs portefeuilles.

La suite de ce document porte sur cette contrainte et a pour objectif de montrer qu'il existe une mesure pour quantifier la contribution d'un actif au risque financier d'un portefeuille. Nous montrerons d'abord que la variance est une bonne mesure du risque d'un actif unique détenu isolément. Ensuite nous montrerons que cette mesure n'est plus valable dans le cas où le même actif fait partie d'un portefeuille composé de plusieurs actifs et que dans ce cas la contribution de l'actif au risque financier du portefeuille est la covariance du rendement de l'actif et du rendement du portefeuille. Finalement nous expliquerons comment il est possible d'utiliser cette mesure du risque pour établir des critères permettant de choisir les actifs constituant un portefeuille.

2 La variance comme mesure du risque

Considérons un actif λ dont la valeur à la date t_j vaut Y_j. Pour calculer le taux de rentabilité de cet actif pour une période τ quelconque, il suffit de connaître Y_{j+1}, la valeur de l'actif λ à la date $t_{j+1} = t_j + \tau$. Le taux de rentabilité[1] de l'action λ pour la durée δ est alors donné par

$$R_{\lambda,j} = \frac{Y_{j+1} - Y_j}{Y_j}. \tag{1}$$

Considérons par exemple deux actions prises parmi les titres qui composent l'indice du CAC40 : Pernod-Ricard (SICOVAM 12069) et TF1 (SICOVAM 5490). Les graphiques[2] du cours de ces deux actions de 1998 à aujourd'hui sont donnés aux figures 1 et 2.

A partir des cours de ces actions nous allons calculer les taux de rentabilité trimestriels pour les cinq dernières années. Nous écrirons λ_1 pour parler de

[1]La rentabilité définie ici ne tient pas compte des dividendes, ni des frais de transaction, ni d'éventuels frais d'imposition.

[2]Ces graphiques proviennent du site web www.abcbourse.com.

Fig. 1 – Cours de l'action Pernod-Ricard de 1998 à aujourd'hui

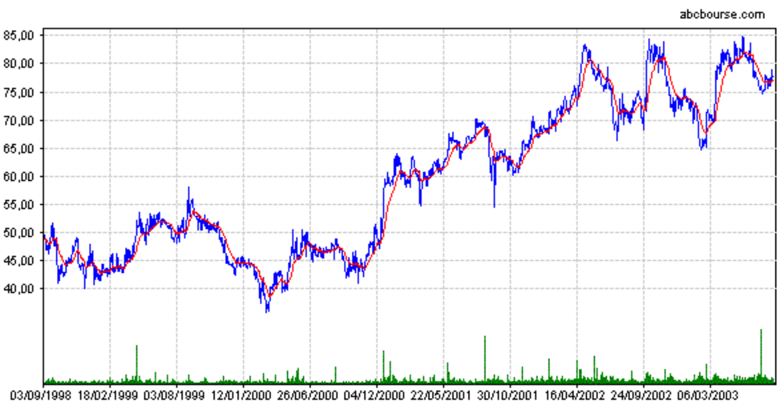


Fig. 2 – Cours de l'action TF1 de 1998 à aujourd'hui

l'action Pernod-Ricard et λ_2 pour parler de l'action TF1. Pour calculer les taux de rentabilité trimestriels, nous effectuons des mesures en temps discret sur une durée de $\delta = 60$ mois avec une période $\tau = 3$ mois. Nous avons donc $n = \delta/\tau = 20$ taux de rentabilité $R_{\lambda_i,j}$ où $i = 1, 2$ et $j = 0, \ldots, n$ (voir le tableau 1 en annexe).

Utilisons ces observations pour calculer le taux de rentabilité moyen pour chacune des actions λ_1 et λ_2. Le taux de rentabilité moyen de l'action λ pour n mesures effectuées sur une durée δ est donné par

$$\overline{R}_{\lambda,\delta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_{\lambda,j}. \tag{2}$$

A partir de cette équation nous obtenons $\overline{R}_{\lambda_1,\delta} = 3,14\%$ et $\overline{R}_{\lambda_2,\delta} = 9,39\%$. Pour chacune des actions λ_1 et λ_2, traçons le graphique de l'évolution des taux de rentabilité en fonction du temps auxquels nous ajoutons respectivement les droites $R_{\lambda_1} = \overline{R}_{\lambda_1,\delta} = 3,14\%$ et $R_{\lambda_2} = \overline{R}_{\lambda_2,\delta} = 9,39\%$.

Les graphiques 3 et 4 nous permettent d'observer pour ces actions des écarts en hausse (points au dessus de la droite) et des écarts en baisse (points en dessous de la droite) par rapport au taux de rentabilité moyen.

En supposant que l'évolution des cours des actions λ_1 et λ_2 pour l'année 2003 sera semblable à l'évolution des cours de ces actions depuis 1998, c'est-à-dire en supposant que la tendance observée pour ces deux actions se maintient, nous pouvons alors considérer que le taux de rentabilité pour la période de trois mois correspondant au premier trimestre de 2003 sera proche du taux de rentabilité moyen calculé à partir de l'équation (2). Posons donc comme taux de rentabilité anticipés pour les actions λ_1 et λ_2 :

$$R^*_{\lambda_1} = 3,1\% \text{ et } R^*_{\lambda_2} = 9,4\%.$$

Le taux de rendement réalisé au temps t_{n+1} diffère, sauf par pure coïncidence, du taux de rendement anticipé. L'ensemble des écarts observés précédemment peuvent donner une idée de combien pourrait être cette différence. Considérons la valeur du cours des actions λ_1 et λ_2 au temps t_{n+1} correspondant à la fin du premier trimestre de l'année 2003, et calculons les taux de rentabilité pour ce trimestre :

		Action	
	$n = 20$	λ_1	λ_2
Valeur du cours à $t_n = 01/01/2003$	Y_n	74,28€	25,99€
Valeur du cours à $t_{n+1} = 01/04/2003$	Y_{n+1}	78,80€	21,30€
Taux de rentabilité réalisé	$R_{\lambda_i,n+1}$	6,09%	-18,05%

Ajoutons les valeurs calculées de $R_{\lambda_1,n+1}$ et $R_{\lambda_2,n+1}$ aux graphiques 3 et 4 et sur lesquels nous ajoutons la projection des écarts en hausse et en baisse sur la droite $t = t_{n+1}$. Nous obtenons les graphiques 5 et 6 qui nous permettent d'observer que

Fig. 3 – Taux de rentabilité trimestriels de l'action Pernod-Ricard de 1998 à aujourd'hui

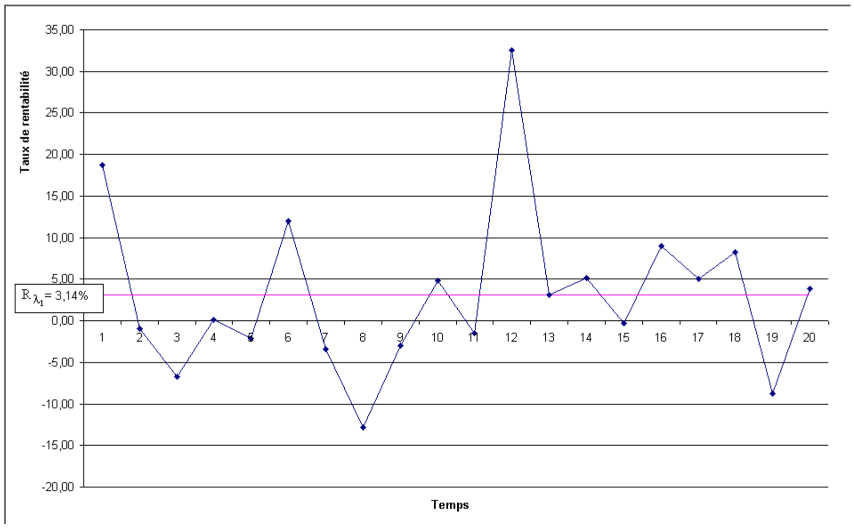


Fig. 4 – Taux de rentabilité trimestriels de l'action TF1 de 1998 à aujourd'hui

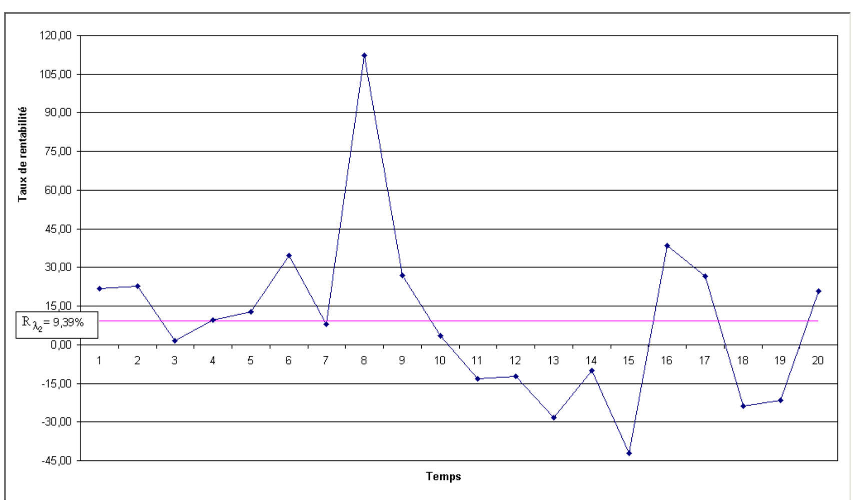


FIG. 5 – Variabilité des taux de rentabilité trimestriels de l'action Pernod-Ricard de 1998 à aujourd'hui

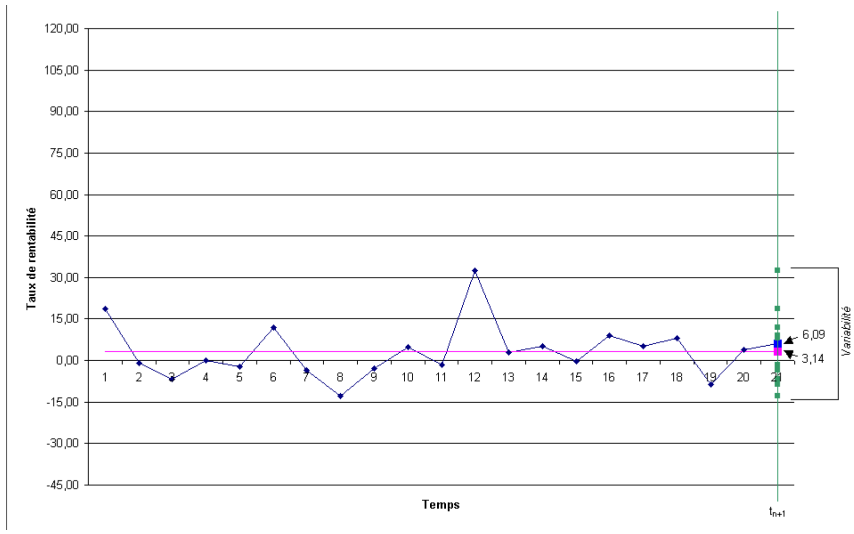
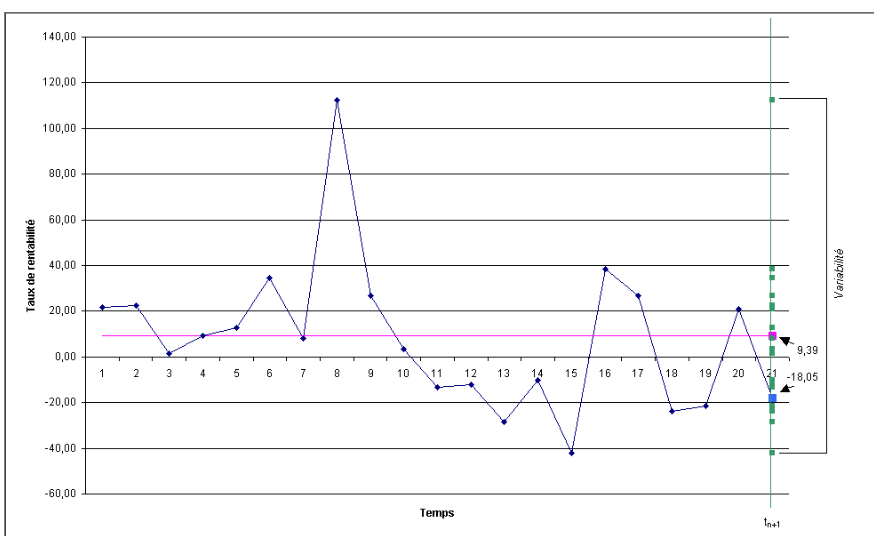


FIG. 6 – Variabilité des taux de rentabilité trimestriels de l'action TF1 de 1998 à aujourd'hui



- le taux de rentabilité réalisé avec l'action λ_1 est près de la valeur anticipé ;
- la variation ou la dispersion des taux de rentabilité de l'action λ_1 autour du taux de rentabilité moyen est faible ;
- le taux de rentabilité réalisé avec l'action λ_2 s'écarte de 27% du taux de rentabilité anticipé ;
- la variation ou la dispersion des taux de rentabilité de l'action λ_2 autour du taux de rentabilité moyen est assez importante.

Ainsi l'action λ_1 peut-être définie comme peu risquée contrairement à l'action λ_2 dont la dispersion des taux de rentabilité est plus importante. Le risque d'un actif peut donc être assimilé à la dispersion de sa rentabilité autour du taux de rentabilité moyen. Par ailleurs, une bonne mesure de la dispersion est l'écart-type, ou son carré, la variance, qui peut être estimée pour n mesures effectuées sur une durée δ par l'équation

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(R_{\lambda,j} - \overline{R}_{\lambda,\delta})^2. \tag{3}$$

Pour terminer, précisons, comme le fait remarquer [4], que le fait d'associer les concepts de rentabilité et de risque à la moyenne et à la variance n'est possible que si la distribution des taux de rentabilité suit une loi normale. Or d'après Fama(1965), la loi normale constituerait une excellente approximation de cette distribution (voir aussi [4]).

3 Diversification et covariance

Nous avons considéré à la section précédente le cas de l'évaluation du risque d'actifs détenus isolément. Nous allons maintenant considérer un portefeuille p composé de k actifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ dans des proportions $\omega_i, i = 1, \ldots, k$ telle que $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$. Le taux de rentabilité du portefeuille p pour la période allant de t_j à $t_{j+1} = t_j + \tau$ est alors donné par

$$R_{p,j} = \sum_{i=1}^{k} \omega_i R_{\lambda_i,j}, \tag{4}$$

où $R_{\lambda_i,j}$ est le taux de rentabilité de l'actif λ_i pour la période τ tel que défini par l'équation (1). Comme pour le cas d'un actif unique détenu isolément, une mesure du risque du portefeuille est son écart-type, σ_p, ou sa variance qui est estimée pour n mesures effectuées sur la durée δ par l'équation

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(R_{p,j} - \overline{R}_{p,\delta})^2, \tag{5}$$

où $\overline{R}_{p,\delta}$ est le taux de rentabilité moyen du portefeuille et est donné par l'équation (2).

Quelle est maintenant la contribution d'un actif λ_i au risque du portefeuille p ? Si l'écart-type tel qu'obtenu de l'équation (3) donnait une bonne mesure de la contribution de l'actif λ_i au risque du portefeuille, alors la moyenne pondérée des écarts-type des actifs composant le portefeuille donnerait une bonne approximation du risque du portefeuille :

$$\sigma_p \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{k} \omega_i \sigma_{\lambda_i}. \tag{6}$$

D'où il y aurait, pour tout portefeuille p, égalité entre la valeur pour σ_p obtenue via l'équation (5) et la valeur calculée à partir de l'équation (6). Or ceci n'est pas le cas. Nous construirons un contre-exemple à partir des deux actions de la section précédente. Supposons que le portefeuille p soit composé de $\omega_1 = 70\%$ de titres de l'action Pernod-Ricard et de $\omega_2 = 30\%$ de titres de l'action TF1. Posons la durée comme à la section précédente, soit $\delta = 60$ mois et $n = 20$ le nombre de mesures effectuées sur la durée δ. Les n taux de rentabilité $R_{p,j}$ sont calculés à partir de l'équation (4) (voir le tableau 1 en annexe) et nous permettent de calculer le taux de rentabilité moyen $\overline{R}_{p,\delta} = 5,02\%$. L'équation de la variance (3) nous donne $\sigma_{\lambda_1} = 9,79\%$ et $\sigma_{\lambda_2} = 32,20\%$ alors que l'équation (6) nous donne alors $\sigma_p = 16,5\% \neq 10,62\%$ qui est la valeur de σ_p obtenue à partir de l'équation (5). Ce qui démontre que la variance ne constitue pas une mesure appropriée pour quantifier la contribution d'un actif au risque d'un portefeuille.

Considérons maintenant un portefeuille composé de 2 actifs quelconque λ_1 et λ_2 dans des proportions ω_1 et ω_2. D'après l'équation (4), nous avons

$$R_{p,j} = \omega_1 R_{\lambda_1,j} + \omega_2 R_{\lambda_2,j}.$$

Par ailleurs, $\overline{R}_{p,\delta}$ est une estimation de l'espérance mathématique du taux de rendement du portefeuille p pour la durée δ. Puisque l'espérance mathématique est une fonction linéaire, nous obtenons

$$\overline{R}_{p,\delta} = \omega_1 \overline{R}_{\lambda_1,\delta} + \omega_2 \overline{R}_{\lambda_2,\delta}.$$

où les $\overline{R}_{\lambda_i,\delta}$ sont estimés pour n mesures effectuées sur la durée δ par l'équation (2).

Les deux équations précédentes nous permettent de développer l'équation (5) comme suit :

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(R_{p,j}-\overline{R}_{p,\delta})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}((\omega_1 R_{\lambda_1,j}+\omega_2 R_{\lambda_2,j})-(\omega_1\overline{R}_{\lambda_1,\delta}+\omega_2\overline{R}_{\lambda_2,\delta}))^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\omega_1(R_{\lambda_1,j}-\overline{R}_{\lambda_1,\delta})+\omega_2(R_{\lambda_2,j}-\overline{R}_{\lambda_2,\delta}))^2 \\
&= \omega_1^2\sigma_{\lambda_1}^2+\omega_2^2\sigma_{\lambda_2}^2+\frac{2\omega_1\omega_2}{n}\sum_{j=1}^{n}(R_{\lambda_1,j}-\overline{R}_{\lambda_1,\delta})(R_{\lambda_2,j}-\overline{R}_{\lambda_2,\delta}) \\
&= \omega_1^2\sigma_{\lambda_1}^2+\frac{\omega_1\omega_2}{n}\sum_{j=1}^{n}(R_{\lambda_1,j}-\overline{R}_{\lambda_1,\delta})(R_{\lambda_2,j}-\overline{R}_{\lambda_2,\delta}) \\
&\quad +\omega_2^2\sigma_{\lambda_2}^2+\frac{\omega_1\omega_2}{n}\sum_{j=1}^{n}(R_{\lambda_2,j}-\overline{R}_{\lambda_2,\delta})(R_{\lambda_1,j}-\overline{R}_{\lambda_1,\delta}) \\
&= \omega_1^2\sigma_{\lambda_1}^2+\omega_1\omega_2\mathrm{Cov}(R_{\lambda_1},R_{\lambda_2})+\omega_2^2\sigma_{\lambda_2}^2+\omega_1\omega_2\mathrm{Cov}(R_{\lambda_2},R_{\lambda_1}), \qquad (7)
\end{aligned}
$$

car $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$ est un estimateur de la covariance des variables aléatoires X et Y. L'égalité 7 nous permet d'observer que la contribution d'un actif au risque d'un portefeuille composé de deux actifs n'est pas donnée par la variance seule de l'actif mais aussi par la covariance du taux de rentabilité de cet actif et du taux de rentabilité du second actif du portefeuille.

La covariance peut aussi s'écrire comme suit :

$$\mathrm{Cov}(R_{\lambda_1},R_{\lambda_2})=\rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}, \qquad (8)$$

où $\rho_{\lambda_1\lambda_2}$ est le coefficient de corrélation des actifs λ_1 et λ_2. Le coefficient de corrélation et la diversification d'un portefeuille sont étroitement liés. En fait, la valeur du coefficient de corrélation permet d'avoir une idée sur la façon dont les taux de rentabilité de deux actifs évoluent l'un par rapport à l'autre selon les événements qui influencent les cours de ces actifs. En tenant compte de ce coefficient on peut choisir les actifs d'un portefeuille de sorte qu'un même événement vienne compenser une perte de rentabilité due à la détention de l'actif λ_i par un gain de rentabilité dû à la détention d'un actif λ_j. Ceci est à la base même de l'idée de diversification du risque d'un portefeuille (c'est ce que nous étudierons à la prochaine section). Il existe d'ailleurs une relation entre la manière dont sont corrélés les taux de rentabilité et la diversification du risque d'un portefeuille. Cette relation pour un portefeuille composé de deux actifs λ_1 et λ_2 dans des proportions $\omega_1 \geq 0$ et $\omega_2 \geq 0$ tel que $\omega_1+\omega_2=1$ se décline en quatre cas :

1. Les taux de rentabilité sont corrélés de manière parfaitement positive, i.e. $\rho_{\lambda_1\lambda_2}=1$. L'équation (7) devient $\sigma_p^2=(\omega_1\sigma_{\lambda_1}+\omega_2\sigma_{\lambda_2})^2$ et alors σ_p est

exactement la moyenne pondérée des écarts-type des actifs composant le portefeuille (l'hypothèse (6) est donc vrai pour ce cas de portefeuille). La diversification n'apporte donc rien.

2. Les taux de rentabilité sont corrélés de manière totalement négative, i.e. $\rho_{\lambda_1\lambda_2} = -1$. L'équation (7) devient $\sigma_p^2 = (\omega_1\sigma_{\lambda_1} - \omega_2\sigma_{\lambda_2})^2$ et alors en prenant $\omega_1 = \frac{\sigma_{\lambda_1}\omega_2}{\sigma_{\lambda_2}}$ nous avons $\sigma_p = 0$. La diversification permet donc d'éliminer tout risque.
3. Les taux de rentabilité ont une corrélation nulle, i.e. $\rho_{\lambda_1\lambda_2} = 0$. L'équation (7) devient alors $\sigma_p^2 = \omega_1^2\sigma_{\lambda_1}^2 + \omega_2^2\sigma_{\lambda_2}^2$, et dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{2}\omega_i\sigma_{\lambda_i}\right)^2 - \sigma_p^2 &= (\omega_1\sigma_{\lambda_1} + \omega_2\sigma_{\lambda_2})^2 - (\omega_1^2\sigma_{\lambda_1}^2 + \omega_2^2\sigma_{\lambda_2}^2) \\ &= 2\omega_1\omega_2\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2} > 0.\end{aligned}$$

   La diversification permet donc de diminuer le risque.
4. Les taux de rentabilité sont corrélés de telle sorte que $0 < \rho_{\lambda_1\lambda_2} < 1$. L'equation (7) demeure inchangée sauf que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{2}\omega_i\sigma_{\lambda_i}\right)^2 - \sigma_p^2 &= (\omega_1\sigma_{\lambda_1} + \omega_2\sigma_{\lambda_2})^2 \\ &\quad - (\omega_1^2\sigma_{\lambda_1}^2 + \omega_2^2\sigma_{\lambda_2}^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}) \\ &= 2\omega_1\omega_2(1 - \rho_{\lambda_1\lambda_2})\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2} > 0.\end{aligned}$$

   La diversification permet donc aussi de diminuer le risque mais de façon moindre que pour le cas précédent.

Le coefficient de corrélation nous permet donc d'apprécier l'influence de la diversification sur le risque d'un portefeuille - plus la corrélation entre deux actifs est faible plus la diversification permet de diminuer le risque Pour montrer maintenant que la diversification élimine complètement les variances des actifs composant un portefeuille, considérons un portefeuille p de k actifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ dont les proportions dans le portefeuille sont données par ω_i avec $i = 1, \ldots, n$ tel que $\sum_{i=1}^{k}\omega_i = 1$.

D'après l'équation (8) et puisque $\rho_{pp} = 1$, la variance du portefeuille peut s'écrire

$$\sigma_p^2 = \mathrm{Cov}(R_p, R_p).$$

La suite de la démonstration repose sur la définition de la covariance pour deux variables aléatoire X et Y, soit $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$ et le fait que l'espérance mathématique est une fonction linéaire. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathrm{Cov}(R_p, R_p) \\
&= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_j R_{\lambda_i}, R_p\right) \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i R_{\lambda_i} - \sum_{i=1}^{k} \omega_i E(R_{\lambda_i})\right)(R_p - E(R_p))\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i (R_{\lambda_i} - E(R_{\lambda_i}))\right)(R_p - E(R_p))\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{k} \omega_i (R_{\lambda_i} - E(R_{\lambda_i}))(R_p - E(R_p))\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \omega_i E\left[(R_{\lambda_i} - E(R_{\lambda_i}))(R_p - E(R_p))\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \omega_i \mathrm{Cov}(R_{\lambda_i}, R_p).
\end{aligned}$$

D'où la contribution de l'actif λ_i au risque du portefeuille est donnée par

$$\omega_i \mathrm{Cov}(R_{\lambda_i}, R_p)$$

qui correspond à la covariance des taux de rentabilité de l'actif et du portefeuille contenant l'actif.

4 Frontière efficiente

L'objectif de cette section est de montrer qu'il est possible, étant donnée une mesure pour quantifier le risque, d'utiliser cette mesure pour contrôler le risque et d'établir alors des règles permettant de définir une stratégie de placement offrant un rendement optimal.

4.1 Deux actifs risqués

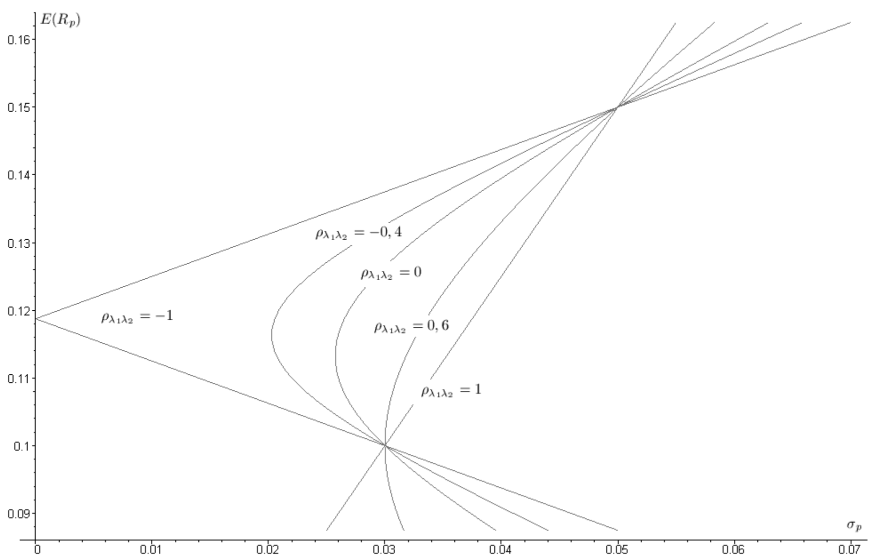
Considérons un portefeuille p composé de deux actifs risqués λ_1 et λ_2 dans des proportions ω_1 et ω_2 telles que $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Nous pouvons alors exprimer ω_2 en fonction de ω_1. En posant $\omega_1 = \omega$, nous obtenons $\omega_2 = 1 - \omega$. L'espérance du taux de rentabilité et le risque du portefeuille p s'exprime alors également en fonction de ω :

$$\begin{aligned}
E(R_p)(\omega) &= \omega E(R_{\lambda_1}) + (1-\omega) E(R_{\lambda_2}) && (9) \\
\sigma_p^2(\omega) &= \omega^2 \sigma_{\lambda_1}^2 + (1-\omega)^2 \sigma_{\lambda_2}^2 + 2\omega(1-\omega)\rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}, && (10)
\end{aligned}$$

où $\rho_{\lambda_1\lambda_2}$ est le coefficient de corrélation des actifs λ_1 et λ_2.

En faisant varier ω sur l'intervalle $[-\infty, \infty]$, nous obtenons à partir des équations (9) et (10) l'ensemble des paires $(E(R_p), \sigma_p)$ possibles. Dans le plan espérance-écart-type ces paires définissent une courbe paramétrée illustrant la variation de l'espérance du taux de rentabilité et du risque du portefeuille en fonction du paramètre ω. Toutefois, en raison de l'équation (10) qui dépend de la valeur du coefficient de corrélation, il faut considérer plusieurs cas afin d'avoir une idée de la forme de la courbe paramétrée. Nous considérerons donc, pour le portefeuille p tel que $\sigma_{\lambda_1} = 0{,}05$, $\sigma_{\lambda_2} = 0{,}03$, $\overline{R}_{\lambda_1} = 15\%$ et $\overline{R}_{\lambda_1} = 10\%$, les 5 cas suivants : $\rho_{\lambda_1\lambda_2} = \{-1; -0{,}4; 0; 0{,}6; 1\}$. D'après les courbes au gra-

Fig. 7 – Combinaison de deux actifs risqués



phique 7 définies par l'équation (10), nous observons que les cas de corrélation parfaite $\rho_{\lambda_1\lambda_2} = -1$ et $\rho_{\lambda_1\lambda_2} = 1$ donnent des formes dégénérées de l'hyperbole, alors que les autres cas donnent tous une hyperbole. Pour démontrer cette dernière affirmation pour toutes les valeurs du coefficient de corrélation tel que $-1 < \rho_{\lambda_1\lambda_2} < 1$, il faut trouver les expressions des constantes h, k, a et b qui ne comportent pas le paramètre ω dans l'équation générale d'une hyperbole mettant $E(R_p)$ et σ_p en relation :

$$\frac{(\sigma_p - h)^2}{a^2} - \frac{(E(R_p) - k)^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Nous commençons par trouver le centre (h, k) de l'hyperbole en supposant que $h = 0$ et en sachant que k est égal à la valeur de l'ordonnée du sommet de l'hyperbole. Or le sommet de l'hyperbole correspond au point où le risque est minimum. D'où pour trouver k, il suffit de trouver la valeur de $\omega = \omega_{min}$ minimisant l'équation (10), puis de calculer $k = E(R_p)(\omega_{min})$. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\omega_{min} &= \frac{\sigma^2_{\lambda_1} - \rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}}{\sigma^2_{\lambda_1} + \sigma^2_{\lambda_2} - 2\rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}} \\
k &= \frac{\sigma^2_{\lambda_1}E(R_{\lambda_2}) + \sigma^2_{\lambda_2}E(R_{\lambda_1}) - \rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}(E(R_{\lambda_1}) + E(R_{\lambda_2}))}{\sigma^2_{\lambda_1} + \sigma^2_{\lambda_2} - 2\rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}}.
\end{aligned}$$

Pour trouver a et b ou de manière équivalente a^2 et b^2, nous remplaçons dans l'équation (11) les valeurs pour h et k puis en considérant les deux points $(E(R_p)(0), \sigma_p(0))$ et $(E(R_p)(1), \sigma_p(1))$ nous dérivons de l'équation (11) deux équations dont les deux inconnues sont a^2 et b^2. La résolution de ce système d'équations donne :

$$\begin{aligned}
a^2 &= \frac{(1 - \rho^2_{\lambda_1\lambda_2})\sigma^2_{\lambda_1}\sigma^2_{\lambda_2}}{\sigma^2_{\lambda_1} + \sigma^2_{\lambda_2} - 2\rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}} \\
b^2 &= \frac{(1 - \rho^2_{\lambda_1\lambda_2})\sigma^2_{\lambda_1}\sigma^2_{\lambda_2}(E(R_{\lambda_1}) - E(R_{\lambda_2}))^2}{(\sigma^2_{\lambda_1} + \sigma^2_{\lambda_2} - 2\rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2})^2},
\end{aligned}$$

où a^2 est bien positif puisque

$$-1 < \rho_{\lambda_1\lambda_2} < 1 \Rightarrow 0 < (\sigma_{\lambda_1} - \sigma_{\lambda_2})^2 = \sigma^2_{\lambda_1} + \sigma^2_{\lambda_2} - 2\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2} < \sigma^2_{\lambda_1} + \sigma^2_{\lambda_2} - 2\rho_{\lambda_1\lambda_2}\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}$$

et b^2 est aussi positif puisque

$$0 < \rho^2_{\lambda_1\lambda_2} < 1 \Rightarrow (1 - \rho^2_{\lambda_1\lambda_2}) > 0.$$

Finalement nous pouvons vérifier la validité de notre hypothèse sur la forme de la courbe paramétrée en substituant les équations (9) et (10) dans l'équation (11) puis en vérifiant que le tout se simplifie pour donner $1 = 1$.

A chaque point de l'hyperbole correspond un portefeuille p déterminé par les valeurs $(E(R_p)(\omega), \sigma_p(\omega))$. De plus, nous retrouvons sur cette hyperbole le portefeuille de risque minimum, soit le portefeuille correspondant au sommet de l'hyperbole. Par ailleurs, pour toute valeur du risque plus grande que la valeur minimum du risque, $\sigma_p > \sigma_p(\omega_{min})$, l'hyperbole nous donne deux portefeuilles possibles, un premier portefeuille p_1 tel que $E(R_{p_1}) < E(R_p)(\omega_{min})$ et un deuxième portefeuille p_2 tel que $E(R_{p_2}) > E(R_p)(\omega_{min})$. Pour une même valeur du risque, un investisseur choisira naturellement le portefeuille p_2 qui possède un taux de rentabilité espéré supérieur à celui du portefeuille p_1. Le frontière efficiente ou optimale pour un portefeuille composé de deux actifs risqués peut donc être définie comme étant la partie supérieure de l'hyperbole.

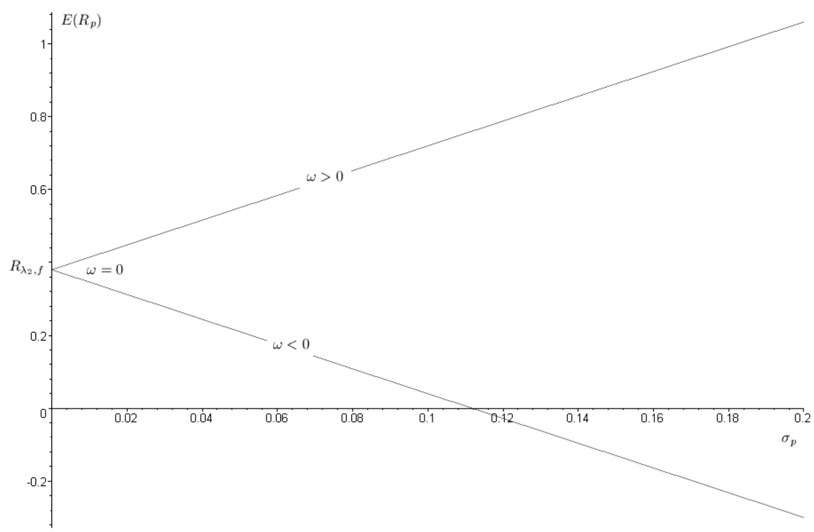
Afin d'obtenir un résultat à propos de la frontière efficiente dans le cas général, soit pour celui d'un portefeuille composé de k actifs risqués et d'un actif sans risque[3], nous allons considérer deux autre cas particuliers : celui d'un portefeuille composé d'un actif risqué et d'un actif sans risque, et celui d'un portefeuille composé de k actifs risqués.

4.2 Un actif risqué et un actif sans risque

Considérons un portefeuille p composé d'un actif risqué λ_1 et d'un actif sans risque λ_2 dans des proportions ω et $1-\omega$. La forme de la frontière efficiente pour ce cas est simple puisque le taux de rentabilité espéré, $R_{\lambda_2,f}$, pour l'actif λ_2 est connu et que son risque est nul. Les équations (9) et (10) pour le taux de rentabilité espéré et le risque du portefeuille p deviennent

$$\begin{aligned} E(R_p)(\omega) &= \omega E(R_{\lambda_1}) + (1-\omega)R_{\lambda_2,f} && (12)\\ \sigma_p^2(\omega) &= \omega^2\sigma_{\lambda_2}^2. && (13)\end{aligned}$$

FIG. 8 – Combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque



L'équation (13) nous permet de trouver une expression pour ω en fonction de σ_p que nous substituons ensuite dans l'équation (12) pour obtenir une relation entre $E(R_p)$ et σ_p qui ne soit pas fonction du paramètre ω. Nous obtenons

$$E(R_p) = \pm\frac{\sigma_p}{\sigma_{\lambda_1}}(E(R_{\lambda_1}) - R_{\lambda_2,f}) + R_{\lambda_2,f}.$$

[3]On suppose que tous les actifs sans risque sont équivalents et donc qu'un investisseur choisira nécessairement celui dont le taux de rentabilité est le plus élevé.

Si nous supposons[4] que $E(R_{\lambda_1}) > R_{\lambda_2,f}$, alors dans le plan espérance-écart-type nous obtenons les deux demi-droites du graphique 8 selon que $\omega \geq 0$ ou $\omega < 0$. Le frontière efficiente contenant les portefeuille optimaux est évidemment la demi-droite pour laquelle $\omega \geq 0$.

4.3 k actifs risqués

Considérons un portefeuille p composé de k actifs risqués λ_i, $i = 1, \ldots, k$, dans des proportions ω_i, $i = 1, \ldots, k$ telles que $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$. Le taux de rentabilité espéré et le risque du portefeuille p en fonction des k paramètres $\omega_1, \ldots, \omega_k$, sont donnés par les équations

$$E(R_p)(\omega_1, \ldots, \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i E(R_{\lambda_i}) \tag{14}$$

$$\sigma_p(\omega_1, \ldots, \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \omega_i \omega_j \mathrm{Cov}(R_{\lambda_i}, R_{\lambda_j}). \tag{15}$$

Si nous faisons varier chacun des k paramètres $\omega_1, \ldots, \omega_k$ sur l'intervalle $[-\infty, \infty]$, alors les paires $(E(R_p)(\omega_1, \ldots, \omega_k), \sigma_p(\omega_1, \ldots, \omega_k))$ qui décrivent les portefeuilles possibles, forment une surface dans le plan espérance-écart-type. Cette surface contient entre autres les k portefeuilles composés chacun d'un seul des actifs risqués λ_i. Pour avoir une idée de la forme de cette surface, considérons l'équation (15) que nous réécrivons comme suit, sachant que $\omega_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i$:

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \omega_i \omega_j \sigma_{\lambda_i \lambda_j} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \omega_i \omega_j \sigma_{\lambda_i \lambda_j} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \omega_k \sigma_{\lambda_i \lambda_k} + \omega_k^2 \sigma_{\lambda_k}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \omega_i \omega_j \sigma_{\lambda_i \lambda_j} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i\right) \sigma_{\lambda_i \lambda_k} + \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i\right)^2 \sigma_{\lambda_k}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \omega_i \omega_j \sigma_{\lambda_i \lambda_j} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \sigma_{\lambda_i \lambda_k} - 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \omega_i \omega_j \sigma_{\lambda_i \lambda_k} \\
&\quad + \sigma_{\lambda_k}^2 - 2 \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \sigma_{\lambda_k}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \omega_i \omega_j \sigma_{\lambda_k}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \omega_i \omega_j (\sigma_{\lambda_i \lambda_k} - 2\sigma_{\lambda_i \lambda_k} + \sigma_{\lambda_k}^2) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i (\sigma_{\lambda_i \lambda_k} - \sigma_{\lambda_k}^2) + \sigma_{\lambda_k}^2.
\end{aligned}$$

[4]Cette hypothèse est valable car dans le cas contraire les investisseurs voudrons tous vendre l'actif risqué pour acheter l'actif sans risque alors qu'aucun investisseur ne voudra détenir l'actif risqué...

La dernière équation est un polynôme de degré 2 et de $k-1$ variables. L'une des solutions possibles d'un tel polynôme est une hyperboloïde orientée selon l'axe σ_p dans un espace à k dimensions correspondant aux paramètres $\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \sigma_p$. La forme des coefficients du polynôme nous permet de vérifier que l'hyperboloïde est bien la solution plutôt qu'un autre type de surface quadratique. Par ailleurs, nous pouvons exprimer $E(R_p)$ en fonction des $k-1$ variables $\omega_1, \dots, \omega_{k-1}$ en utilisant encore une fois le fait que $\omega_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i$. Nous obtenons

$$E(R_p)(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = E(R_{\lambda_k}) + \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i (E(R_{\lambda_i}) - E(R_{\lambda_k})).$$

Cette dernière équation correspond à celle d'une droite dans le sous espace de dimension $k-1$ défini par les paramètres $\omega_1, \dots, \omega_{k-1}$. En projetant alors l'hyperboloïde dans le plan passant par cette droite et orienté dans le sens du paramètre σ_p nous obtenons alors une hyperbole dans le plan espérance-écart-type. Cette hyperbole contient nécessairement tous les portefeuilles constitués des k actifs risqués. La frontière efficiente contenant les portefeuilles optimaux est alors, comme pour le cas de deux actifs risqués, la partie supérieure de l'hyperbole.

4.4 k actifs risqués et un actif sans risque

Finalement, considérons un portefeuille composé de k actifs risqués λ_i, $i = 1, \dots, k$ et de un actif sans risque dans des proportions ω_i, $i = 1, \dots, k+1$ telles que $\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i = 1$. L'objectif est maintenant d'exprimer le portefeuille p comme une combinaison d'un portefeuille p' constitué des k actifs risqués et de l'actif sans risque. Le poids de l'actif sans risque λ_{k+1} étant ω_{k+1} dans le portefeuille p, le poids du portefeuille p' sera alors de $1-\omega_{k+1}$. Le taux de rentabilité espéré du portefeuille p est donné par l'équation

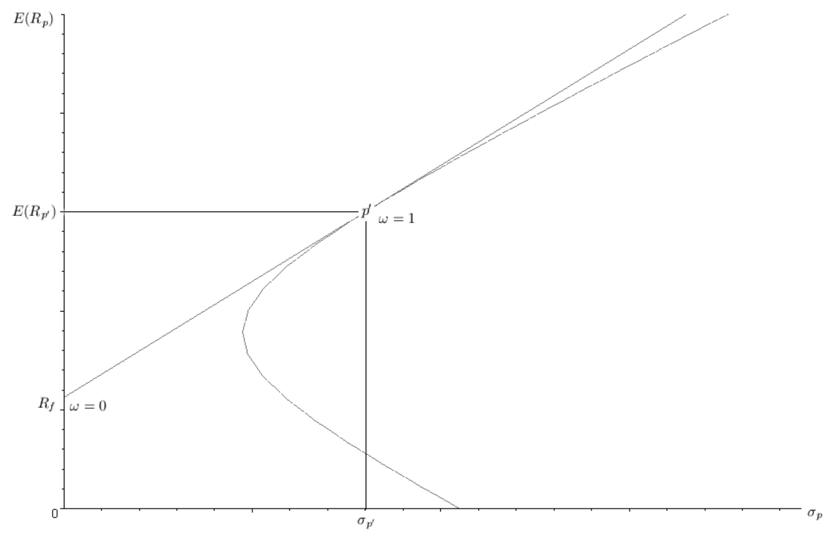
$$E(R_p) = (1 - \omega_{k+1}) E(R_{p'}) + \omega_{k+1} R_{\lambda_{k+1}, f}$$

où les poids ω'_i, $i = 1, \dots, k$ des k actifs risqués au sein du portefeuille p' sont donnés par $\omega'_i = \frac{\omega_i}{1-\omega_{k+1}}$, pour lesquels nous avons bien

$$\sum_{i=1}^{k} \omega'_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i}{1 - \omega_{k+1}} = \frac{1}{1 - \omega_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} \omega_i = \frac{1}{1 - \omega_{k+1}} (1 - \omega_{k+1}) = 1.$$

D'après le résultat de la section précédente, l'ensemble des portefeuilles p' possibles est contenu dans une surface délimitée par une hyperbole. Selon la section 4.2, les portefeuilles composés d'un actif risqué et d'un actif sans risque sont situés sur les demie-droites ayant pour sommet la valeur connue du taux de rentabilité de l'actif sans risque, $R_{\lambda_{k+1}, f}$. Ainsi l'ensemble des portefeuilles p possibles est contenu entre les deux demi-droites de sommet $(0, R_{\lambda_{k+1}, f})$ dans le plan espérance-écart-type et tangentes respectivement à la partie inférieure et supérieure de l'hyperbole. La frontière efficiente contenant les portefeuilles p optimaux est alors la demi-droite supérieure puisque, comme le montre le graphique 9, pour une même valeur du risque, les portefeuilles sur cette droite présentent le meilleur taux de rentabilité. Notons de plus qu'au point de tangence entre la demie-droite et la partie supérieure de l'hyperbole, nous avons $\omega_{k+1} = 0$, c'est-à-dire que le portefeuille p est alors composé du seul portefeuille p' composé des k actifs risqués. D'où les portefeuilles de la frontière efficiente sont ceux composés de l'actif sans risque et du portefeuille tangent p'.

FIG. 9 – Combinaison de k actifs risqués et de 1 actif sans risque



5 Choix d'un portefeuille

A la section précédente nous avons défini la frontière efficiente contenant les portefeuilles optimaux pour le cas général d'un portefeuille composé de k actifs risqués et d'un actif sans risque. Devant ces nombreuses possibilités de portefeuilles, un investisseur doit faire le choix d'un seul. Ce choix se base généralement sur la satisfaction que l'investisseur retire d'un portefeuille ayant un certain taux de rentabilité pour un niveau de risque donné. En microéconomie ce concept se nomme l'utilité et peut être exprimé comme une fonction de $E(R_p)$ et σ_p. En projetant le plan espérance-écart-type les courbes d'utilité obtenues de la fonction d'utilité d'un investisseur, $U(E(R_p, \sigma_p)$, nous pouvons alors identifier le portefeuille optimal ayant le plus de chance de satisfaire l'investisseur.

Il s'agit du portefeuille optimal situé sur la frontière efficiente et qui est tangent à l'une des courbes d'utilité.

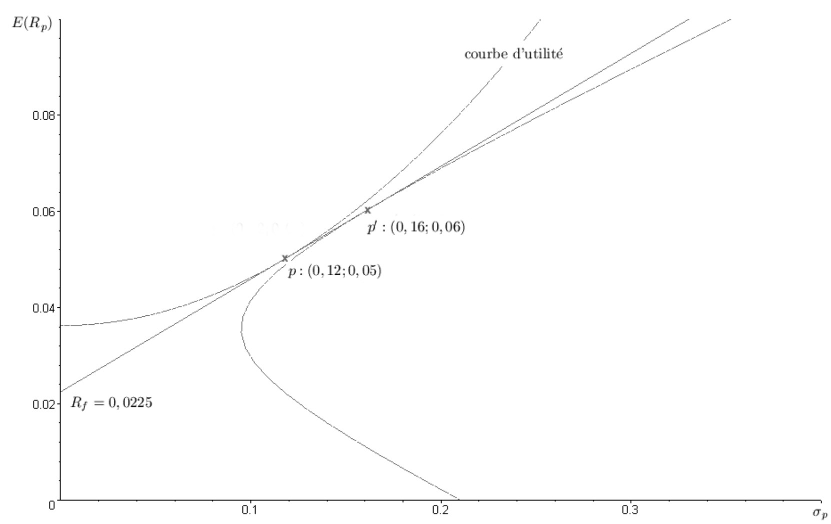
Pour illustrer ceci, nous nous choisirons un portefeuille qui contiendra deux actifs risqués λ_1 et λ_2, des titres de Pernod-Ricard (SICOVAM 12069) et de TF1 (SICOVAM 5490) et un actif sans risque, un placement sur le livret A, dont le taux de rentabilité depuis le 1er août 2003 est de $2,25\%$.

Notre fonction d'utilité est simple, elle augmente lorsque le taux de rentabilité augmente mais diminue du carré du risque (la variance) lorsque le risque augmente :

$$U(E(R_p), \sigma_p) = E(R_p) - \sigma_p^2$$

Nous utilisons pour σ_{λ_1}, σ_{λ_2}, $E(R_{\lambda_1})$ et $E(R_{\lambda_2})$, les valeurs calculées à la section 3 puis estimons $\rho_{\lambda_1 \lambda_2} = 0,02$. Le graphique 10 nous permet de trouver notre portefeuille optimal. Le portefeuille p' optimal situé sur l'hyperbole et tangent à la demi-droite de sommet $(0; 0{,}0225)$, est celui composé de 53% de titres de Pernod-Ricard et 47% de titres de TF1. Ce portefeuille offre un taux de rentabilité espéré d'environ 6% pour un risque estimé de 16%. Le portefeuille p optimal situé sur la frontière efficiente décrite par la demi-droite et tangent à l'une de nos courbes d'utilité est composé de 73% du portefeuille p' composé des deux actifs risqués et de 27% de l'actif sans risque. Nos choisissons donc le portefeuille composé de 39% de titres de Pernod-Ricard, 34% de titres de TF1 et d'un placement sur le livret A à hauteur de 27% de notre capital. Ce portefeuille nous offre un taux de rentabilité espéré de 5% pour un risque estimé de 12%.

FIG. 10 – Frontière efficiente et courbe d'utilité



Cette méthode pour déterminer des stratégies de placements optimales est cependant très sensible aux variations des valeurs utilisées pour les divers taux de rentabilité et pour quantifier le risque. En fait, une faible variation de la valeur pour le taux de rentabilité de l'un des actifs considérés peut fortement modifier la composition des portefeuilles optimaux. De plus, comme le fait remarquer [4], le nombre de termes de risque, les covariances, augmente rapidement avec le nombre d'actifs que l'on désire considérer. En fait pour n actifs, il faut estimer $n(n+1)/2$ covariances, ce qui constitue un travail considérable.

Toutefois, dans tous les cas où l'on désire contrôler le risque, il est nécessaire de le quantifier. L'analyse espérance-écart-type offre une mesure simple et intuitive du risque par rapport au taux de rentabilité d'un placement et elle permet de plus de mesurer l'effet de la diversification sur le risque d'un portefeuille.

Références

[1] Elie Cohen. *Dictionnaire de gestion*, page 308. La Découverte, Paris, 1997.

[2] André Heck. *Introduction to Maple*. Springer-Verlag, New York, 1996.

[3] Robert Hogg and Elliot Tanis. *Probability and Statistic Inference*. Macmillian Publishing Company, New York, 1993.

[4] Bertrand Jacquillat and Bruno Solnik. *Les marchés financiers : gestion de portefeuilles et des risques*, chapter 3, pages 79–102. Dunod, Paris, 2002.

[5] Roland Larson, Robert Hostetler, and Bruce Edwards. *Calculus with Analytic Geometry*, chapter 9, 11, pages 634–664, 714–780. D.C. Heath and Company, Toronto, 1994.

[6] Jean Mathis. *Gestion d'actifs*, chapter 2, 3 et 4, pages 18–80. Economica, Paris, 2002.

[7] Anne-Marie Piercie du Sert. *Risque et contrôle du risque*. Economica, Paris, 1999.

A Cours des actions de Pernod-Ricard et TF1

Le tableau suivant synthétise les cours des actions des groupes Pernod-Ricard (SICOVAM 12069) et TF1 (SICOVAM 5490). Le cours retenu pour un trimestre est le cours de fermeture du premier jour ouvré du trimestre. Ces données proviennent de http ://www.abcbourse.com/.

		Pernod-Ricard		TF1		Portefeuille
		Cours	Rentabilité	Cours	Rentabilité	Rentabilité
1998	Janvier	43,54€		9,53€		
	Avril	51,70€	18,74%	11,59€	21,62%	19,60%
	Juillet	51,22€	-0,93%	14,21€	22,61%	6,13%
	Octobre	47,77€	-6,74%	14,41€	1,41%	-4,30%
1999	Janvier	47,84€	0,15%	15,77€	9,44%	2,94%
	Avril	46,80€	-2,17%	17,79€	12,81%	2,32%
	Juillet	52,40€	11,97%	23,94€	34,57%	18,75%
	Octobre	50,60€	-3,44%	25,85€	7,98%	-0,01%
2000	Janvier	44,12€	-12,81%	54,90€	112,38%	24,75%
	Avril	42,80€	-2,99%	69,60€	26,78%	5,94%
	Juillet	44,88€	4,86%	72,00€	3,45%	4,44%
	Octobre	44,20€	-1,52%	62,55€	-13,13%	-5,00%
2001	Janvier	58,56€	32,49%	54,95€	-12,15%	19,10%
	Avril	60,36€	3,07%	39,40€	-28,30%	-6,34%
	Juillet	63,44€	5,10%	35,45€	-10,03%	0,56%
	Octobre	63,24€	-0,32%	20,55€	-42,03%	-12,83%
2002	Janvier	68,96€	9,04%	28,47€	38,54%	17,89%
	Avril	72,44€	5,05%	36,04€	26,59%	11,51%
	Juillet	78,40€	8,23%	27,42€	-23,92%	-1,42%
	Octobre	71,52€	-8,78%	21,51€	-21,55%	-12,61%
2003	Janvier	74,28€	3,86%	25,99€	20,83%	8,95%
	Avril	78,80€	6,09%	21,30€	-18,05%	-1,15%
	Juillet	77,60€	-1,52%	26,54€	24,60%	6,32%
	Octobre					

TAB. 1 – Cours des actions de Pernord-Ricard et TF1