

DE L'EXISTENCE D'HYPERTORES PRÈS D'UNE  
BIFURCATION DE HOPF-HOPF AVEC RÉSONANCE 1 : 2

Par  
Étienne Dupuis  
Août 2000

Thèse présentée à l'Ecole des Etudes Supérieures  
de l'Université d'Ottawa pour l'obtention  
de la Maîtrise ès Sciences en Mathématiques<sup>1</sup>

© Copyright 2000  
par Étienne Dupuis, Ottawa, Canada

---

<sup>1</sup>Le programme de la maîtrise est conjoint avec l'Université Carleton et est administré par l'Institut de Mathématiques et de Statistiques d'Ottawa-Carleton

# Résumé

Nous considérons un système d'équations différentielles  $\dot{x} = f(x, \alpha)$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$  est une fonction du temps et où  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 3$  est un paramètre. Nous supposons que ce système est tel qu'à  $\alpha = \alpha_0$ ,  $f$  possède un point d'équilibre non-hyperbolique  $x_0$  et que le jacobien de  $f$  évalué en  $(x_0, \alpha_0)$  possède exactement deux paires de valeurs propres conjuguées strictement imaginaire,  $\pm i\omega$  et  $\pm 2i\omega$ . Ces conditions caractérisent la bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2.

Nous allons démontrer qu'arbitrairement près de cette bifurcation il peut se produire, selon la valeur de certaines dérivées de  $f$ , une bifurcation secondaire de type point limite/Hopf dans les équations d'amplitude de la forme normale tronqué, et que cette bifurcation induit la création d'un hypertore dans le système  $\dot{x} = f(x, \alpha)$ . Nous effectuons également des simulations numériques pour venir appuyer nos résultats théoriques.

# Remerciements

L'auteur tient particulièrement à remercier le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada pour la généreuse bourse qui lui a été offerte ainsi que son directeur de thèse Victor LeBlanc pour les judicieux conseils qu'il lui a prodigué tout au long de la dernière année.

L'auteur remercie Benoît Dionne et Sam Melkonian, qui ont relu attentivement l'ébauche de cette thèse.

L'auteur désire également remercier les auteurs de MiKTeX, un environnement  $\text{\LaTeX}$  pour Windows disponible gratuitement.

# Dédicace

Je dédie cette thèse à Mélanie, mon trésor et mon désir de tous les instants.

# Table des matières

Résumé	ii
Remerciements	iii
Dédicace	iv
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Applications . . . . .	4
1.3 Énoncé du problème . . . . .	4
1.4 Plan de la thèse . . . . .	6
<b>2 Forme normale et simplifications</b>	<b>7</b>
2.1 Forme normale de Poincaré-Birkhoff . . . . .	7
2.2 Réduction à trois dimensions . . . . .	9
2.3 Simplifications additionnelles . . . . .	10
<b>3 L'interaction de mode point limite/Hopf</b>	<b>13</b>
3.1 Introduction . . . . .	13
3.2 Notions théoriques . . . . .	14

3.3	Points fixes . . . . .	20
3.4	Localisation de la bifurcation . . . . .	21
3.5	Bifurcations en point limite et de Hopf . . . . .	24
3.6	Forme normale . . . . .	25
3.7	Interprétation géométrique . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>31</b>
4.1	Processus de création d'un hypertore . . . . .	31
4.2	Les mêmes diagrammes dans le système quadridimensionnel . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
<b>6</b>	<b>Démonstrations et calculs</b>	<b>42</b>
6.1	Calcul de la forme normale simplifiée . . . . .	42
6.2	Calculs pour l'interaction point limite/Hopf . . . . .	53

# Table des figures

1	Diagramme de bifurcation de (16) dans le cas où $s = 1$ et $\theta < 0$ . . . .	18
2	Diagrammes de phases d'une interaction de mode point limite/Hopf .	19
3	Diagramme de bifurcation de (15) dans le cas où $s = 1$ et $\theta < 0$ . . . .	19
4	Les même diagrammes en trois dimensions . . . . .	20
5	$S$ en fonction de $\beta$ . . . . .	29
6	Diagramme de bifurcation dans le plan $\mu_1 = -0,05$ . . . . .	34
7	Amplitude $r$ des branches de points fixes en fonction de $\mu_2$ . . . . .	35
8	Diagrammes de phase du système (40) près de $(\mu_2^*, \mu_3^*)$ . . . . .	37
9	Évolution d'une solution $\text{Im } w_1$ de (41) en fonction de $t$ dans la région <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">D</span> selon 3 échelles différentes . . . . .	39

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Introduction

L'étude moderne des bifurcations a réellement pris son envol en 1942 avec la publication du théorème de HOPF [18, 28], qui donne des conditions suffisantes pour la création d'une famille d'orbites périodiques dans un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha, \beta),$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lisse,  $\alpha$  est un paramètre distingué et  $\beta$  est un vecteur de paramètres secondaires. En supposant que  $f(x_0, \alpha_0, \beta_0) = 0$  et que les quatre conditions

1. Le jacobien  $D_x f$  évalué en  $(x_0, \alpha_0, \beta_0)$  possède une paire de valeurs propres  $\lambda(\alpha_0, \beta_0)$  de la forme  $\pm i\omega$ ,  $\omega > 0$ ,
2. Le même jacobien ne possède aucune autre valeur propre de la forme  $ik\omega$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ ,
3.  $\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$ ,
4. Le premier coefficient de Liapunov (qui se calcule à partir des dérivées partielles de  $f$ ) est non-nul,

sont satisfaites, Hopf a démontré qu'une famille unique d'orbites périodiques ayant une période approximativement égale à  $2\pi/\omega$  bifurque du point d'équilibre  $x_0$ . En



supposant que la première condition (qui caractérise la bifurcation de Hopf) est satisfaite, les trois autres conditions seront presque toujours (au sens mathématique) satisfaites pour les systèmes d'équations différentielles n'ayant qu'un seul paramètre. Cependant, si d'autres paramètres sont présents dans le système d'équations ( $\beta$  dans notre cas), alors ces conditions peuvent être violées pour certaines valeurs de  $\beta$ .

Par exemple, lorsque la quatrième condition est violée, on dit qu'il y a bifurcation de BEAUTIN [1, 22]. Dans ce cas, plusieurs familles d'orbites périodiques peuvent être créées. Plus récemment, GOLUBITSKY et LANGFORD [13] ont étudié, à l'aide de la théorie des singularités, les cas où les troisième et quatrième conditions ne sont pas satisfaites.

La deuxième condition quant à elle peut-être violée de plusieurs façons. Par exemple, en plus des valeurs propres  $\pm i\omega$ , il pourrait y avoir une valeur propre nulle. Dans ce cas, on dit qu'il y a interaction de mode point limite/Hopf. L'étude de cette bifurcation a débuté au milieu des années 1970 avec GAVRILOV [11], GUCKENHEIMER [14], HOLMES [17], KEENER [19], LANGFORD [23] et TAKENS [30]. La dynamique près de cette bifurcation est beaucoup plus complexe que le théorème de Hopf laisse entrevoir. En fait, cette interaction peut mener à la création d'un tore, à l'apparition d'orbites homocliniques [3] puis finalement au chaos [10].

Les mêmes auteurs des premières recherches sur l'interaction de mode point limite/Hopf se sont également penchés sur une interaction de mode plus complexe, celle de Hopf-Hopf [12, 15, 30]. Elle se produit lorsque le jacobien  $D_x f$  évalué en  $(x_0, \alpha_0, \beta_0)$  possède exactement deux paires de valeurs propres sur l'axe imaginaire, soient  $\pm i\omega$  et  $\pm i\gamma$ , où  $\gamma \geq \omega$ . Lorsque le rapport  $\gamma/\omega$  est irrationnel, la deuxième condition du théorème de Hopf n'est toutefois pas violée. Ainsi, en supposant que les autres conditions sont vérifiées pour chacune des paires de valeurs propres, on peut appliquer le théorème de Hopf deux fois et conclure que deux familles d'orbites périodiques naîtront de la bifurcation : une de période approximativement  $2\pi/\omega$  et l'autre de  $2\pi/\gamma$ . Cependant, des structures complexes, telles un tore ou même un hypertore peuvent également être créées. Bien que l'étude de la forme normale tronquée de cette bifurcation ait été complétée au milieu des années 1980 par ŻOLADEK [33],

CARR, CHOW et HALE [5], VAN GILS [31] et CHOW, LI et WANG [6], toute la richesse de la dynamique près de la bifurcation n'est pas encore connue. Le lecteur est invité à consulter CHOW, LI et WANG [7], GUCKENHEIMER et HOLMES [15] ou KUZNETSOV [22] pour connaître les interactions de mode de type point limite/Hopf et Hopf-Hopf.

Dans le cas où le rapport  $\gamma/\omega$  est rationnel, on dit qu'il y a résonance  $1 : \gamma/\omega$  dans l'interaction de mode Hopf-Hopf. Cependant, seuls les cas où  $\gamma/\omega = 1, 2$  ou  $3$  sont nettement différents de la bifurcation de Hopf-Hopf sans résonance, bien que LEBLANC [25] ait démontré que des phénomènes intéressants peuvent se produire lorsque  $\gamma/\omega = 4$ . Le cas où  $\gamma = \omega$ , c'est-à-dire lorsque  $\pm i\omega$  est une valeur propre de multiplicité 2, a été étudié par plusieurs personnes, dont KRUPA [21], VAN GILS, KRUPA et LANGFORD [32] et FURTER [9]. Le cas de la résonance  $1 : 3$  a quant à lui été très peu étudié.

L'étude de la résonance  $1 : 2$ , à laquelle cette thèse est consacrée, est en voie de développement. Les travaux les plus importants sur cette bifurcation sont ceux de KNOBLOCH et PROCTOR [20] et de LEBLANC et LANGFORD [26]. Ces deux auteurs analysent en toute généralité et avec rigueur le sort de tous les cycles limites issus de la bifurcation, sans toutefois discuter de leur stabilité ni de dynamique plus complexe. Les travaux de HE [16], qui fut le premier à étudier un déploiement à trois paramètres de la résonance  $1 : 2$ , et de LEBLANC [25], où des bifurcations secondaires sont mises en évidence, sont également à consulter.

Dans cette thèse, nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'arbitrairement près d'une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance  $1 : 2$  il se produise, dans les équations d'amplitude de la forme normale tronquée de la bifurcation, une interaction de mode de type point limite/Hopf de nature à créer un hypertore. Nous explorons en détail, théoriquement et numériquement, le processus de création de cet objet. Ce phénomène n'ayant pas été étudié auparavant dans la résonance  $1 : 2$ , cette thèse permet donc d'approfondir notre compréhension de cette bifurcation en ajoutant aux résultats partiels déjà connus.

## 1.2 Applications

La connaissance de la dynamique près d'une interaction de mode Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 est importante pour comprendre certains comportements de modèles physiques. Par exemple, en démontrant l'existence et en analysant une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2, CAMPBELL et LEBLANC [4] expliquent la présence d'une bifurcation en doublage de période dans un système d'équations différentielles avec délais décrivant plusieurs types de systèmes mécaniques où l'inertie joue un grand rôle. La présence de résonance 1 : 2 a été démontré dans toute une panoplie de modèles, dont dans des modèles décrivant

- la propagation de flammes dans un canal [27],
- le mécanisme de réflexe de la pupille [2] ou bien
- un réseau de neurones couplés avec délais [24].

Puisque certains phénomènes sont propres à la résonance 1 : 2, il est primordial de ne pas en omettre l'étude théorique pour bien comprendre des modèles comme ceux cités ci-haut.

## 1.3 Énoncé du problème

Nous allons considérer le système d'équations différentielles

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \tag{1}$$

où  $x = x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 3$  est un vecteur de paramètres et  $f$  est suffisamment différentiable en  $x$  et en  $\alpha$ . Nous allons supposer qu'en  $\alpha_0$  la fonction  $f$  possède un point d'équilibre  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que le jacobien  $D_x f$  évalué en  $(x_0, \alpha_0)$  possède exactement deux paires de valeurs propres sur l'axe imaginaire, l'une des paires étant le double de l'autre :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,4} &= \pm i\omega \\ \lambda_{2,3} &= \pm 2i\omega, \end{aligned}$$

où  $\omega > 0$ . Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, ces conditions caractérisent la bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. Puisque par hypothèse

le jacobien  $D_x f$  évalué en  $(x_0, \alpha_0)$  ne possède aucune valeur propre nulle, alors il est inversible et d'après le théorème de la fonction implicite il existe, pour  $\alpha$  dans un voisinage de  $\alpha_0$ , une fonction différentiable  $x(\alpha)$  telle que  $f(x(\alpha), \alpha) = 0$ .  $D_x f$ , évalué en  $(x(\alpha), \alpha)$  possède alors les quatre valeurs propres

$$\begin{aligned}\lambda_{1,4}(\alpha) &= \mu_1(\alpha) \pm i\omega_1(\alpha) \\ \lambda_{2,3}(\alpha) &= \mu_2(\alpha) \pm i\omega_2(\alpha)\end{aligned}$$

telles que

$$\mu_1(\alpha_0) = \mu_2(\alpha_0) = 0 \tag{2}$$

et

$$\omega_2(\alpha_0) = 2\omega_1(\alpha_0) = 2\omega \neq 0. \tag{3}$$

Les valeurs propres  $\lambda_{1,2,3,4}(\alpha)$  sont toutes différentiables en  $\alpha$ .

Bien que  $n$ , la dimension de notre système d'équations, est arbitraire, le théorème de la variété du centre (énoncé dans [22]) nous permet de limiter notre étude au cas  $n = 4$ . En effet, si  $n > 4$ , le système d'équations (1) est topologiquement équivalent, dans un voisinage de  $(x_0, \alpha_0)$ , au système d'équations

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \begin{bmatrix} \mu_1(\alpha) & -\omega_1(\alpha) & 0 & 0 \\ \omega_1(\alpha) & \mu_1(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2(\alpha) & -\omega_2(\alpha) \\ 0 & 0 & \omega_2(\alpha) & \mu_2(\alpha) \end{bmatrix} u + \mathcal{O}(\|u\|^2) \\ \dot{v} &= H(\alpha)v,\end{aligned}$$

où  $u = u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $v = v(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-4}$  et  $H(\alpha)$  est une matrice de dimension  $(n-4) \times (n-4)$  ne possédant aucune valeur propre à partie réelle nulle en  $H(\alpha_0)$ . Le comportement du flot pour l'équation hyperbolique en  $v$  étant bien connu, seule la détermination de la dynamique du système quadridimensionnel en  $u$  nécessite une étude plus approfondie.

Quant à la dimension de l'espace des paramètres,  $p$ , nous allons la supposer égale à trois. La raison est que la bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 est une

bifurcation de codimension 3 car de façon générique il faut ajuster trois paramètres pour satisfaire aux conditions (2) et (3) : un pour annuler la partie réelle d'une paire de valeurs propres, un pour annuler la partie réelle de l'autre paire de valeurs propres puis un troisième pour amener l'une des parties imaginaires au double de la distance de l'autre. La codimension 3 de la bifurcation est bien illustrée par l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \alpha &\mapsto (\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha), \omega_2(\alpha) - 2\omega_1(\alpha)), \end{aligned}$$

car la bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 se produira exactement lorsque  $\mathcal{P}(\alpha) = 0$ . Ainsi, dans le cas où  $p < 3$ , la plupart (au sens mathématiques) des systèmes d'équations différentielles ne subiront pas de bifurcation avec résonance 1 : 2 tandis que si  $p > 3$ , il y aura pour presque tous les systèmes d'équations une variété de dimension  $p - 3$  dans l'espace des paramètres sur laquelle les conditions (2) et (3) seront satisfaites.

## 1.4 Plan de la thèse

Nous allons, au prochain chapitre, effectuer divers changements de variables et de paramètres pour amener le système d'équations (1) sous une forme normale simplifiée. Puis, au chapitre 3, nous allons concentrer tous nos efforts à l'étude d'une interaction de mode point limite/Hopf se produisant dans les équations d'amplitude de la forme normale tronquée. Le chapitre 4 présente une simulation numérique dans le but d'appuyer les résultats théoriques du chapitre précédent. Finalement, nous avons regroupé au chapitre 6 les démonstrations de tous les lemmes techniques justifiant les calculs des sections 2.1, 2.2, 2.3 et 3.4.

# Chapitre 2

## Forme normale et simplifications

### 2.1 Forme normale de Poincaré-Birkhoff

Afin d'étudier le système (1), il convient de le représenter sous une forme normale simplifiée, ce que nous ferons en cinq étapes. La première consiste à déplacer le point d'équilibre qui bifurque à l'origine et à effectuer un changement de base afin d'exprimer le système (1) sous la forme

$$\dot{z} = A(\alpha)z + \mathcal{O}(\|z\|^2),$$

où  $z \in \mathbb{C}^2$  et  $A$  est une matrice de  $2 \times 2$  sous forme canonique de Jordan :

Voir p. 42 **Lemme 1.** *Il est possible d'effectuer un changement de coordonnées localement inversible qui transforme le système (1) en le système d'équations*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1(\alpha)z_1 + g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) \\ \dot{z}_2 = \lambda_2(\alpha)z_2 + h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha), \end{cases} \quad (4)$$

où  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  et où les fonctions  $g$  et  $h$  sont suffisamment différentiables pour être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) &= \sum_{2 \leq j+k+l+m \leq 3} \frac{g_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} z_1^j \bar{z}_1^k z_2^l \bar{z}_2^m + \mathcal{O}(\|z\|^4) \\ h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) &= \sum_{2 \leq j+k+l+m \leq 3} \frac{h_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} z_1^j \bar{z}_1^k z_2^l \bar{z}_2^m + \mathcal{O}(\|z\|^4), \end{aligned}$$

où les  $g_{jklm}$  et les  $h_{jklm}$  sont différentiables en  $\alpha$  pour  $\|\alpha\|$  suffisamment petit.

La deuxième étape consiste à effectuer un changement de variables localement inversible afin d'amener le système d'équations (4) sous sa forme normale de Poincaré-Birkhoff :

Voir p. 46

**Lemme 2.** *Il existe un changement de coordonnées localement inversible qui transforme le système (4) en la forme normale*

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \lambda_1(\alpha)w_1 + G_{0110}(\alpha)\bar{w}_1w_2 \\ &\quad + G_{2100}(\alpha)w_1^2\bar{w}_1 + G_{1011}(\alpha)w_1w_2\bar{w}_2 + \mathcal{O}(\|w\|^4) \\ \dot{w}_2 &= \lambda_2(\alpha)w_2 + H_{2000}(\alpha)w_1^2 \\ &\quad + H_{1110}(\alpha)w_1\bar{w}_1w_2 + H_{0021}(\alpha)w_2^2\bar{w}_2 + \mathcal{O}(\|w\|^4).\end{aligned}\tag{5}$$

Les formules exactes des coefficients  $G_{jklm}(\alpha)$  et  $H_{jklm}(\alpha)$  sont données au chapitre 6, en page 46. Remarquez que chaque équation de cette forme normale comprend un terme de plus que la forme normale pour la bifurcation de Hopf-Hopf sans résonance (voir KUZNETSOV [22]). Ces termes d'ordre 2,  $G_{0110}(\alpha)$  et  $H_{2000}(\alpha)$ , sont dus à la résonance entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en  $\alpha = \alpha_0$ .

En ignorant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4, on obtient le système

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \lambda_1(\alpha)w_1 + G_{0110}(\alpha)\bar{w}_1w_2 \\ &\quad + G_{2100}(\alpha)w_1^2\bar{w}_1 + G_{1011}(\alpha)w_1w_2\bar{w}_2 \\ \dot{w}_2 &= \lambda_2(\alpha)w_2 + H_{2000}(\alpha)w_1^2 \\ &\quad + H_{1110}(\alpha)w_1\bar{w}_1w_2 + H_{0021}(\alpha)w_2^2\bar{w}_2,\end{aligned}\tag{5'}$$

sur lequel nous allons dorénavant consacrer nos efforts. Le but avoué de cette troncature est de faciliter l'étude de la bifurcation en étudiant une forme normale de l'interaction de mode Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. On dit que le système (5') est une forme normale topologique pour cette bifurcation si le système d'équations (5) (qui représente tous les systèmes d'équations (1) satisfaisants aux conditions (2) et (3)) est localement topologiquement équivalent au système (5') dans un voisinage de  $(x_0, \alpha_0)$ . Or (5') **n'est pas** une forme normale topologique pour (5) car en ignorant les termes d'ordre supérieur nous introduisons une symétrie artificielle qui n'est pas présente en

général dans le système (5). Cependant, nous verrons en page 11 que les bifurcations secondaires auxquelles nous nous intéresserons dans cette thèse se produiront dans le système (5) exactement lorsqu'elle se produisent dans le système tronqué (5'), ce qui en justifie l'étude.

## 2.2 Réduction à trois dimensions

La troisième étape de nos simplifications consiste à transformer le système (5') en un système tridimensionnel  $(\rho, u, v)$ . Pour ce faire, nous allons effectuer le changement de variables

$$\begin{aligned} w_1 &= \rho e^{i\varphi} \\ w_2 &= (u + iv)e^{2i\varphi}, \end{aligned} \tag{6}$$

où  $\rho > 0, u, v \in \mathbb{R}$  et  $\varphi$  est une variable angulaire. Remarquez que ce changement de variables n'est pas bien défini lorsque  $w_1 = 0$ . Attardons-nous donc à la dynamique du système (5') dans ce cas, qui devient, lorsque  $w_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= 0 \\ \dot{w}_2 &= \lambda_2(\alpha)w_2 + H_{0021}(\alpha)w_2^2\bar{w}_2, \end{aligned} \tag{7}$$

ce qui correspond exactement à la forme normale d'une bifurcation de Hopf dans le plan invariant  $w_1 = 0$ . Cette constatation n'est pas surprenante car le jacobien  $D_x f$  évalué en  $(x_0, \alpha_0)$  ne possède que les valeurs propres  $\pm i\omega_1(\alpha_0) = \pm i\omega$  et  $\pm 2i\omega$ . Ainsi, la deuxième condition du théorème de Hopf cité au tout début de l'introduction est satisfaite pour la paire de valeurs propres  $\pm 2i\omega$ , c'est-à-dire que le système (5') ne possède aucune autre valeur propre de la forme  $\pm 2ik\omega$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ . La dynamique du système (5') dans le plan invariant  $w_1 = 0$  est donc bien connue. En particulier, si  $H_{0021}(\alpha_0) < 0$ , il y aura création d'une orbite périodique stable de période approximativement égale à  $2\pi/\omega_2(\alpha_0) = \pi/\omega$  lorsque  $\mu_2(\alpha) = \text{Re } \lambda_2(\alpha)$  passera de négatif à positif [22, 28].

Le lemme suivant ajoute au changement de variables (6) le changement de paramètres démontrant la codimension 3 de la bifurcation dont nous avons déjà discuté dans la section 1.3 :



Voir p. 51 **Lemme 3.** *Supposons que l'application  $\mathcal{P}$  définie par*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mapsto (\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha), \omega_2(\alpha) - 2\omega_1(\alpha))$$

*possède un jacobien inversible en  $\alpha = \alpha_0$ . Alors en effectuant un changement de paramètres et un changement de coordonnées, le système d'équations (5') peut être transformé (en omettant le plan invariant  $w_1 = 0$ ) en le système*

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu_1 + \gamma u - \delta v + \varepsilon_1 \rho^2 + \Theta(u^2 + v^2)) \\ \dot{\varphi} &= \omega_1(\alpha) + \Psi(\rho, u, v, \alpha) \\ \dot{u} &= \mu_2 u - \mu_3 v + 2\delta uv + 2\gamma v^2 \\ &\quad + \rho^2(\varepsilon_2 + \Gamma u - \Delta v) + (\Upsilon u - \Omega v)(u^2 + v^2) \\ \dot{v} &= \mu_3 u + \mu_2 v - 2\delta u^2 - 2\gamma uv \\ &\quad + \rho^2(\varepsilon_3 + \Delta u + \Gamma v) + (\Omega u + \Upsilon v)(u^2 + v^2), \end{aligned} \tag{8}$$

où  $\rho > 0$ ,  $u$  et  $v$  sont des variables réelles,  $\varphi$  est une variable angulaire et  $\Psi$  est une fonction périodique de période  $2\pi$  qui tend vers 0 près de l'origine. Les divers coefficients  $\gamma, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \Theta, \Gamma, \Delta, \Upsilon$  et  $\Omega$ , dont les formules exactes sont données en page 51, dépendent du nouveau paramètre  $\mu = \mathcal{P}(\alpha) \in \mathbb{R}^3$ .

En résumé, le flot associé au système (8) décrit une rotation de vitesse angulaire environ  $\omega_1(\alpha)$  près de l'origine, couplée avec un système autonome tridimensionnel. Il est donc suffisant pour notre étude de considérer le système d'amplitude donné par

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu_1 + \gamma u - \delta v + \varepsilon_1 \rho^2 + \Theta(u^2 + v^2)) \\ \dot{u} &= \mu_2 u - \mu_3 v + 2\delta uv + 2\gamma v^2 \\ &\quad + \rho^2(\varepsilon_2 + \Gamma u - \Delta v) + (\Upsilon u - \Omega v)(u^2 + v^2) \\ \dot{v} &= \mu_3 u + \mu_2 v - 2\delta u^2 - 2\gamma uv \\ &\quad + \rho^2(\varepsilon_3 + \Delta u + \Gamma v) + (\Omega u + \Upsilon v)(u^2 + v^2). \end{aligned} \tag{8'}$$

## 2.3 Simplifications additionnelles

La quatrième étape consiste en une simplification additionnelle :

Voir p. 52

**Lemme 4.** *Supposons que  $\gamma^2(0) + \delta^2(0) \neq 0$ . Alors le système d'équations (8') peut être écrit sous la forme plus simple*

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \rho(\mu_1 + x + \varepsilon_1\rho^2 + \Theta(x^2 + y^2)) \\
\dot{x} &= \mu_2x - \mu_3y + 2y^2 + \varepsilon_2\rho^2 \\
&\quad + \rho^2(\Gamma x - \Delta y) + (\Upsilon x - \Omega y)(x^2 + y^2) \\
\dot{y} &= \mu_3x + \mu_2y - 2xy + \varepsilon_3\rho^2 \\
&\quad + \rho^2(\Delta x + \Gamma y) + (\Omega x + \Upsilon y)(x^2 + y^2),
\end{aligned} \tag{9}$$

où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \Theta, \Gamma, \Delta, \Upsilon$  et  $\Omega$  dépendent de  $\mu \in \mathbb{R}^3$ , sans être forcément les mêmes que ceux du système d'équations (8'). Les formules exactes de ces coefficients sont données en page 52.

Pour l'étude des bifurcations des orbites périodiques de (8) de période fondamentale près de  $2\pi$ , c'est-à-dire des points fixes de (9), seuls les termes linéaires et quadratiques sont nécessaires (voir le théorème 5.3 de LEBLANC et LANGFORD [26]). Cependant, puisque nous voulons étudier des bifurcations de Hopf de points d'équilibre secondaires de (9), nous devons conserver au moins un terme d'ordre 3, sinon ces bifurcations seront dégénérées<sup>1</sup>. Nous conserverons les termes  $\Upsilon x(x^2 + y^2)$  de  $\dot{x}$  et  $\Upsilon y(x^2 + y^2)$  de  $\dot{y}$ , car ces termes sont présents et jouent un rôle essentiel dans la forme normale de Poincaré-Birkhoff de la bifurcation de Hopf correspondant à la valeur propre  $\lambda_2$ . En effet, d'après (7), le premier coefficient de Liapunov associé à la bifurcation de Hopf correspondant à la valeur propre  $\lambda_2$  est donné par

$$\frac{\operatorname{Re} H_{0021}(\alpha)}{\omega_2(\alpha)}$$

tandis que d'après les formules données au lemme 4 en page 52,

$$\Upsilon(\mu) = \frac{\operatorname{Re} H_{0021}(\alpha)}{|G_{0110}(\alpha)|}.$$

---

<sup>1</sup>Nous verrons au lemme 5 qu'un certain coefficient  $\Sigma$  (analogue au premier coefficient de Liapunov) doit être non-nul. Or, ce coefficient est nul si tous les termes d'ordre 3 du système d'équations (9) le sont également. Il faut donc en conserver au moins un pour nos calculs, même si les termes d'ordre 3 n'ont aucune influence sur l'absence ou la présence d'une interaction de mode point limite/Hopf d'un point d'équilibre secondaire. En fait, les formules (29) à (33) demeurent inchangées quels que soient les termes d'ordre 3 présents.

En d'autres mots, ne conserver que les termes d'ordre trois  $\Upsilon x(x^2 + y^2)$  et  $\Upsilon y(x^2 + y^2)$  dans le système d'équations (9) est équivalent à ne conserver que le terme d'ordre trois  $\text{Re } H_{0021}(\alpha)w_2^2\bar{w}_2$  dans le système d'équations (5'), ce qui justifie notre approche.

La cinquième et dernière étape consiste donc à ignorer tous les autres termes d'ordre 3 et à effectuer un dernier changement de variable, soit

$$r = \rho\sqrt{|\varepsilon_2|}. \quad (10)$$

Nous supposons bien sûr que  $\varepsilon_2 \neq 0$ . Le système d'équations (9) devient alors

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu_1 + x) \\ \dot{x} &= \mu_2x - \mu_3y + 2y^2 + \sigma r^2 + \Upsilon x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \mu_3x + \mu_2y - 2xy + \beta r^2 + \Upsilon y(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (11)$$

où  $r > 0$ ,  $\sigma = \pm 1 = \text{sgn } \varepsilon_2$  et  $\beta = \varepsilon_3/|\varepsilon_2|$ . Nous supposons également que  $\beta \neq 0$ . Ce système d'équations est virtuellement identique au système (5.13) étudié par LEBLANC et LANGFORD dans [26], si ce n'est que ces derniers ont effectué le changement de variables  $r = \rho\sqrt{|\varepsilon_3|}$  au lieu de celui donné en (10).

# Chapitre 3

## L'interaction de mode point limite/Hopf

### 3.1 Introduction

Cette section sera entièrement consacrée à l'étude d'une interaction de mode point limite/Hopf se produisant dans les équations d'amplitude (11). Avant de faire cette étude, nous donnerons un résumé des principaux résultats se rattachant à cette bifurcation. L'étude proprement dite consistera à localiser les points fixes de (11), à isoler les valeurs des paramètres pour lesquels se produira l'interaction de mode puis à calculer la forme normale de la bifurcation. À partir de tous ces calculs, nous pourrons donner une interprétation géométrique du comportement du flot du système (11) près de la bifurcation. Nous dériverons également des formules implicites permettant la localisation des bifurcations en point limite et des bifurcations de Hopf dans le système (11). Ces expressions implicites seront nécessaires pour les simulations numériques du chapitre 4.

## 3.2 Notions théoriques

Rappelons d'abord quelques notions théoriques rattachées à l'interaction de mode point limite/Hopf. Afin d'éviter toute confusion de notation avec les systèmes d'équations (1), (4) et (5), nous ajouterons des  $\tilde{\cdot}$  aux variables qui ne sont utilisées que dans cette section.

Un point d'équilibre  $\tilde{x}_0(\tilde{\alpha})$  du système d'équations différentielles

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{\alpha}), \quad (12)$$

où  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  et  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^2$  est un vecteur de paramètres, subit une bifurcation de type point limite/Hopf pour une valeur critique  $\tilde{\alpha}_0$  des paramètres lorsque le jacobien de  $\tilde{f}$  évalué en  $\tilde{x} = \tilde{x}_0(\tilde{\alpha}_0)$  possède les valeurs propres

$$\tilde{\lambda}_1(\tilde{\alpha}_0) = 0 \text{ et } \tilde{\lambda}_{2,3}(\tilde{\alpha}_0) = \pm i\Lambda,$$

où  $\Lambda \in \mathbb{R} > 0$ . Suite à des changements de variables semblables à ceux décrits à la démonstration du lemme 1 (voir KUZNETSOV [22]), il est possible d'écrire le système d'équations (12) sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \tilde{\lambda}_1(\alpha)\xi + \tilde{g}(\xi, \zeta, \bar{\zeta}, \tilde{\alpha}) \\ \dot{\zeta} &= \tilde{\lambda}_2(\alpha)\zeta + \tilde{h}(\xi, \zeta, \bar{\zeta}, \tilde{\alpha}), \end{aligned} \quad (13)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $\zeta \in \mathbb{C}$  et où les fonctions  $\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  sont suffisamment différentiables pour être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\xi, \zeta, \bar{\zeta}, \tilde{\alpha}) &= \sum_{2 \leq j+k+l \leq 3} \frac{\tilde{g}_{jkl}(\tilde{\alpha})}{j!k!l!} \xi^j \zeta^k \bar{\zeta}^l + \mathcal{O}(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4) \\ \tilde{h}(\xi, \zeta, \bar{\zeta}, \tilde{\alpha}) &= \sum_{2 \leq j+k+l \leq 3} \frac{\tilde{h}_{jkl}(\tilde{\alpha})}{j!k!l!} \xi^j \zeta^k \bar{\zeta}^l + \mathcal{O}(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4), \end{aligned}$$

où les  $g_{jkl}$  et les  $h_{jkl}$  sont différentiables en  $\tilde{\alpha}$  pour  $\tilde{\alpha}$  suffisamment près de  $\tilde{\alpha}_0$ . Le lemme suivant est démontré dans KUZNETSOV [22] :

**Lemme 5.** *Soit le système d'équations (12) écrit sous la forme (13), et soient les coefficients (en omettant la dépendance de  $\tilde{\alpha}$  pour alléger la notation)*

$$\begin{aligned} s &= \operatorname{sgn}(\tilde{g}_{200}\tilde{g}_{011}) \\ \theta &= \frac{\operatorname{Re} \tilde{h}_{110}}{\tilde{g}_{200}} \\ \Sigma &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \tilde{H}_{210} + \tilde{h}_{110} \left( \frac{\operatorname{Re} \tilde{H}_{021}}{\tilde{g}_{011}} - \frac{\tilde{G}_{300}}{\tilde{g}_{200}} + \frac{\tilde{G}_{111}}{\tilde{g}_{011}} \right) - \frac{\tilde{H}_{021}\tilde{g}_{200}}{2\tilde{g}_{011}} \right], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{300} &= \tilde{g}_{300} - \frac{6}{\Lambda} \operatorname{Im}(\tilde{g}_{110}\tilde{h}_{200}) \\ \tilde{G}_{111} &= \tilde{g}_{111} - \frac{1}{\Lambda} \left( 2 \operatorname{Im}(\tilde{g}_{110}\tilde{h}_{200}) + \operatorname{Im}(\tilde{g}_{020}\tilde{h}_{101}) \right) \\ \tilde{H}_{210} &= \tilde{h}_{210} + \frac{i}{\Lambda} \left( \tilde{h}_{200}(\tilde{h}_{020} - 2\tilde{g}_{110}) - |\tilde{h}_{210}|^2 - \tilde{h}_{011}\tilde{h}_{200} \right) \\ \tilde{H}_{021} &= \tilde{h}_{021} + \frac{i}{\Lambda} \left( \tilde{h}_{011}\tilde{h}_{020} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{020}\tilde{h}_{101} - 2|\tilde{h}_{011}|^2 - \frac{1}{3}|\tilde{h}_{002}|^2 \right). \end{aligned}$$

Supposons que  $\tilde{g}_{200}(\tilde{\alpha}_0) \neq 0$ , que  $\tilde{g}_{011}(\tilde{\alpha}_0) \neq 0$ , que  $\Sigma(\tilde{\alpha}_0) \neq 0$ , que  $\theta(\tilde{\alpha}_0) \neq 0$  et que l'application  $\tilde{\alpha} \mapsto (\tilde{\lambda}_1(\tilde{\alpha}), \operatorname{Re} \tilde{\lambda}_2(\tilde{\alpha}))$  soit inversible en  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0$ . Alors il existe des changements de paramètres et de coordonnées localement inversibles tels que le système d'équations (12) est localement topologiquement équivalent au système

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \nu_1 + \xi^2 + s\zeta\bar{\zeta} + \mathcal{O}(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4) \\ \dot{\zeta} &= (\nu_2 + i \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_2)\zeta + (\theta + i\vartheta)\xi\zeta + \xi^2\zeta + \mathcal{O}(\|(\xi, \zeta, \bar{\zeta})\|^4), \end{aligned} \tag{14}$$

où  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  sont les nouveaux paramètres.  $\theta$ ,  $s$  et  $\vartheta$  (dont la formule exacte est inimportante) dépendent de façon différentiable de  $\nu$ .

Les valeurs de  $s$  et de  $\theta$  évalués en la valeur critique des paramètres permettent de déterminer les diagrammes de bifurcation de la forme tronquée du système d'équations (14). En effet, en exprimant la variable complexe  $\zeta$  en coordonnées polaires  $(\tilde{\rho}, \tilde{\varphi})$ , le système (14) devient, en ignorant les termes d'ordre supérieurs et en

inversant le temps si  $\Sigma(\tilde{\alpha}_0) < 0$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \nu_1 + \xi^2 + s\tilde{\rho}^2 \\ \dot{\tilde{\rho}} &= \tilde{\rho}(\nu_2 + \theta\xi + \xi^2) \\ \dot{\tilde{\varphi}} &= \text{Im } \tilde{\lambda}_2 + \vartheta\xi.\end{aligned}\tag{15}$$

Puisque les deux premières équations ne dépendent pas de l'angle  $\tilde{\varphi}$  et que d'après la troisième équation le flot décrit une rotation autour de l'axe  $\xi$  de vitesse angulaire approximativement égale à  $\text{Im } \tilde{\lambda}_2$  pour  $\xi$  près de l'origine, il suffit d'étudier le système

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \nu_1 + \xi^2 + s\tilde{\rho}^2 \\ \dot{\tilde{\rho}} &= \tilde{\rho}(\nu_2 + \theta\xi + \xi^2),\end{aligned}\tag{16}$$

ce que nous allons faire immédiatement. En résolvant l'équation  $\dot{\tilde{\rho}} = 0$ , on trouve d'abord que  $\tilde{\rho} = 0$  ou  $\nu_2 + \theta\xi + \xi^2 = 0$ . Dans le premier cas on obtient les deux points d'équilibres

$$(\xi, \tilde{\rho}) = (\pm\sqrt{-\nu_1}, 0)\tag{17}$$

lorsque  $\nu_1 < 0$ . Dans le deuxième cas, si  $\|\nu\|$  est suffisamment petit, on obtient également deux points d'équilibres car

$$\xi = \frac{-\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4\nu_2}}{2}.$$

Cependant, un de ces deux points d'équilibre est tel que  $\xi \rightarrow -\theta$  lorsque  $\nu_2 \rightarrow 0$ . Ce point d'équilibre n'étant pas local à la bifurcation, on doit donc l'ignorer. L'autre point d'équilibre est donné par

$$(\xi, \tilde{\rho}) = \left( -\frac{\nu_2}{\theta} + \mathcal{O}(\nu_2^2), \sqrt{-s(\nu_1 + \frac{\nu_2^2}{\theta^2} + \mathcal{O}(\nu_2^3))} \right),\tag{18}$$

lorsque l'expression sous le radical est positive. Le jacobien de (16) est donné par

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2\xi & 2s\tilde{\rho} \\ \tilde{\rho}(\theta + 2\xi) & \nu_2 + \theta\xi + \xi^2 \end{bmatrix},$$

dont le déterminant est

$$\det \tilde{A} = 2\xi(\nu_2 + \theta\xi + \xi^2) - 2s\tilde{\rho}^2(\theta - 2\xi)$$

et la trace est

$$\text{tr}\tilde{A} = 2\xi + (\nu_2 + \theta\xi + \xi^2).$$

Puisque aux points d'équilibres (17)  $\tilde{\rho} = 0$ , le déterminant de  $\tilde{A}$  évalué en ces points est nul lorsque  $\xi = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\nu_1 = 0$ . Les deux points d'équilibre sont donc issus d'une bifurcation en point limite se produisant sur la droite  $\nu_1 = 0$ . Les valeurs propres de  $\tilde{A}$  évalué aux points d'équilibres (17) étant

$$\pm 2\sqrt{-\nu_1} \quad \text{et} \quad \nu_2 \pm \theta\sqrt{-\nu_1} - \nu_1,$$

le signe de  $\nu_2$  détermine la stabilité des points d'équilibres créés car immédiatement après la bifurcation  $\nu_1$  est quasi-nul. Ainsi, lorsque  $\nu_2 > 0$ , un des points d'équilibre est instable et l'autre est un col, tandis que lorsque  $\nu_2 < 0$ , l'un des points d'équilibre est un col tandis que l'autre est stable. Toujours lorsque  $\tilde{\rho} = 0$ , le déterminant de  $\tilde{A}$  sera également nul lorsque  $\nu_2 + \theta\xi + \xi^2 = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\nu_1 = -\nu_2^2/\theta^2 + \mathcal{O}(\nu_2^3)$ . C'est exactement sur cette courbe de bifurcation (en fourche) qu'apparaît le troisième point fixe, (18). Puisque ce point fixe est tel que  $\tilde{\rho} > 0$ , il correspond à une orbite périodique dans le système tridimensionnel (15). La courbe de bifurcation en fourche correspond donc à une courbe de bifurcation de Hopf dans le système (15). Le point d'équilibre (18) peut lui aussi subir une bifurcation. En effet, lorsque  $\xi = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\nu_2 = 0$ , la trace de  $\tilde{A}$  est nulle. Pour cette valeur critique de  $\nu_2$ , le déterminant de  $\tilde{A}$  évalué au point d'équilibre (18) est égal à  $2\theta\nu_1$ . Il y aura donc une bifurcation de Hopf exactement lorsque  $\nu_2 = 0$  et  $\theta\nu_1 > 0$ . Cette bifurcation crée une orbite périodique autour du point d'équilibre (18), qui change alors de stabilité. Ce cycle correspond à un tore dans le système tridimensionnel (15). La stabilité de cet objet est donnée par le signe du coefficient de Liapunov, signe qui est donné par  $-\text{sgn}\theta = \text{sgn}(-\theta)$  selon KUZNETSOV [22].

Le diagramme de bifurcation de la figure 1 illustre la dynamique décrite ci-haut pour un cas particulier des valeurs de  $s$  et  $\theta$ , soit  $s = 1$  et  $\theta < 0$ . Les six diagrammes de phases, dans le demi-plan  $(\xi, \tilde{\rho})$ , sont donnés à la figure 2. Nous n'avons pas mentionné dans le paragraphe précédent la courbe de bifurcation homoclinique. Sur cette courbe, représentée en pointillé dans le diagramme de bifurcation, le cycle limite présent dans la région  $\boxed{\text{D}}$  est détruit par la formation d'une orbite reliant les deux



point d'équilibres (17). Cependant, cette structure est une conséquence de la symétrie artificielle de (15). Dans le système d'équations général (14), cette symétrie n'est pas présente et le tore est détruit (par un mécanisme qui n'est pas tout à fait encore parfaitement connu) quelque part entre les régions  $\boxed{\text{D}}$  et  $\boxed{\text{E}}$ , près de la courbe de bifurcation de Hopf.

À partir de ces données, il est possible d'interpréter le comportement du flot dans le système tridimensionnel (15), dont le diagramme de bifurcation est donné à la figure 3 et les six diagrammes de phases projetés dans le plan  $(\xi, \tilde{\rho} \cos \varphi)$  sont donnés à la figure 4. Il y a tout d'abord la région  $\boxed{\text{A}}$ , où il n'y a aucun point fixe. Dans les régions  $\boxed{\text{B}}$  et  $\boxed{\text{F}}$ , il y a deux points fixes, créés lors de la bifurcation en point limite en  $\nu_1 = 0$ . Les régions  $\boxed{\text{C}}$  et  $\boxed{\text{E}}$  contiennent également un cycle limite, instable dans la région  $\boxed{\text{C}}$  et stable dans la région  $\boxed{\text{E}}$ . Ce cycle est issu de la bifurcation de Hopf d'un des deux points d'équilibres. En passant de la région  $\boxed{\text{C}}$  à  $\boxed{\text{D}}$ , le cycle subit une bifurcation de Neimark-Sacker et engendre un tore instable, qui sera détruit entre les régions  $\boxed{\text{D}}$  et  $\boxed{\text{E}}$ . Remarquez que ces diagrammes ne sont valides que lorsque  $\Sigma(\tilde{\alpha}_0) > 0$ . Dans le cas contraire, le temps doit être inversé et, par le fait même, toutes les stabilités également.

FIG. 1 – Diagramme de bifurcation de (16) dans le cas où  $s = 1$  et  $\theta < 0$ .

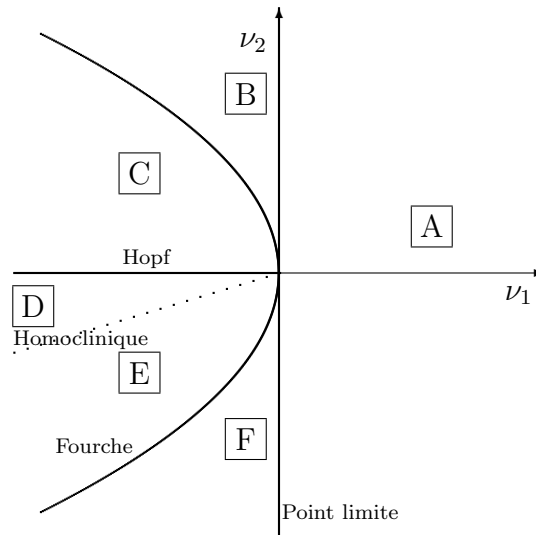


FIG. 2 – Diagrammes de phases d'une interaction de mode point limite/Hopf

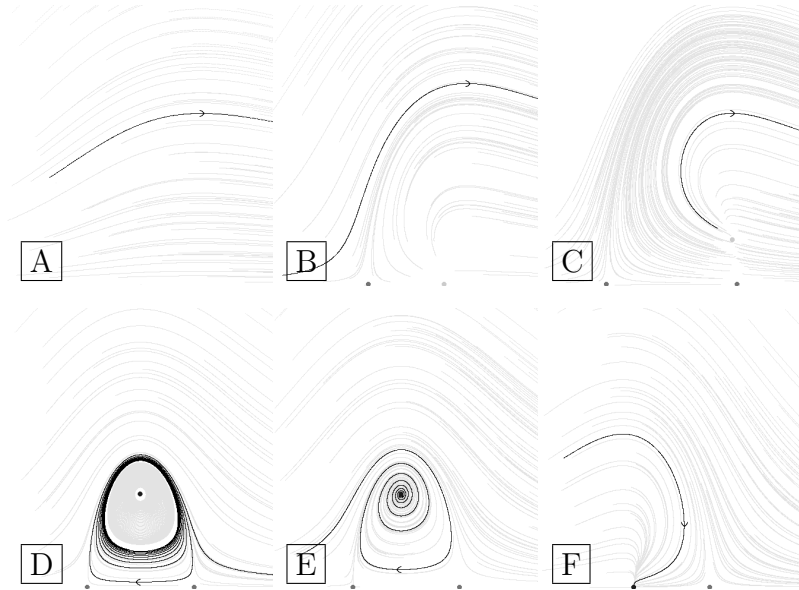


FIG. 3 – Diagramme de bifurcation de (15) dans le cas où  $s = 1$  et  $\theta < 0$ .

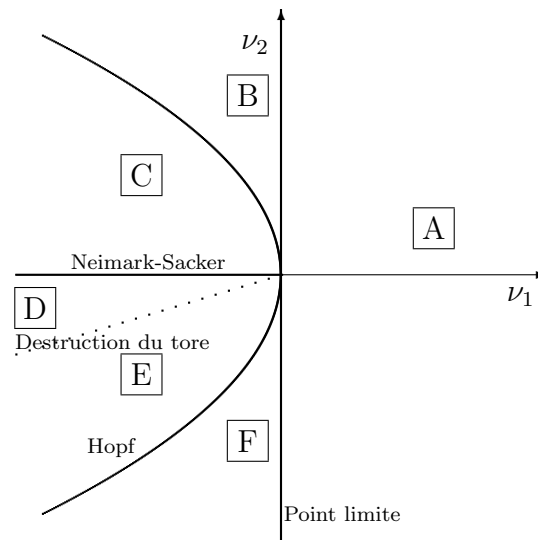
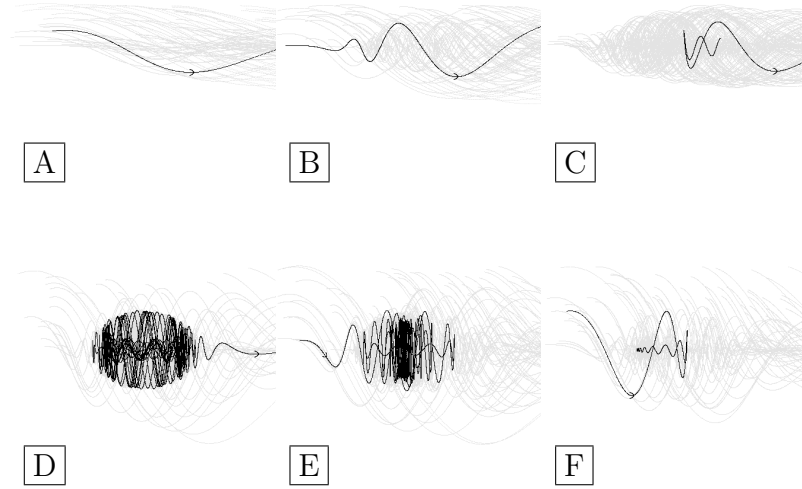


FIG. 4 – Les même diagrammes en trois dimensions



### 3.3 Points fixes

Revenons maintenant à l'étude du système d'équations (11). Un point fixe  $(r, x, y)$  de ce système est tel que

$$0 = r(\mu_1 + x) \quad (19)$$

$$0 = \mu_2 x - \mu_3 y + 2y^2 + \sigma r^2 + \Upsilon x(x^2 + y^2) \quad (20)$$

$$0 = \mu_3 x + \mu_2 y - 2xy + \beta r^2 + \Upsilon y(x^2 + y^2). \quad (21)$$

Puisque  $r > 0$ , alors  $x = -\mu_1$ ,

$$r^2 = \sigma(\mu_1 \mu_2 + \Upsilon \mu_1^3 + \mu_3 y + (\Upsilon \mu_1 - 2)y^2) \quad (22)$$

et  $y$  est une racine réelle de l'équation

$$\left( \frac{\mu_1 \mu_3}{\beta} - \frac{\mu_1 \mu_2 + \Upsilon \mu_1^3}{\sigma} \right) - \left( \frac{\mu_2 + 2\mu_1 + \Upsilon \mu_1^2}{\beta} + \sigma \mu_3 \right) y + \sigma(2 - \Upsilon \mu_1)y^2 - \frac{\Upsilon}{\beta} y^3.$$

Remarquez que lorsque  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \rightarrow 0$ , une des racines réelles tend vers  $2\sigma\beta/\Upsilon$ , qui ne fait pas partie du voisinage de l'origine (nous supposons bien sûr que  $\beta \neq 0$ ). Les

deux autres racines sont réelles lorsque le discriminant (voir SPIEGEL [29])

$$\left(-4\mu_1^2 - (4 + 8\beta^2)\mu_1\mu_2 + 4\sigma\beta\mu_1\mu_3 - \mu_2^2 - 2\sigma\beta\mu_2\mu_3 - \beta^2\mu_3^2\right) \frac{\beta^2}{27\Upsilon^4} + \mathcal{O}(\|\mu\|^3)$$

est négatif ou nul. Une fois ces racines calculées, il faut bien sûr s'assurer que  $r^2$  tel que donnée par (22) est positif. Ainsi, il y aura 0, 1 ou 2 points fixes près de l'origine, ce qui est en accord avec le théorème 5.4 de LEBLANC et LANGFORD [26]. Finalement, le polynôme caractéristique du jacobien de (11) évalué en  $x = -\mu_1$  est donné par

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad (23)$$

où

$$a = -2(\mu_1 + \mu_2 + 2\Upsilon(y^2 + \mu_1^2)) \quad (24)$$

$$b = 3\Upsilon^2(y^2 + \mu_1^2)^2 + 2\Upsilon(y^2 + \mu_1^2)(3\mu_1 + 2\mu_2) + 8y^2 - 6\mu_3y + 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 2\sigma r^2 \quad (25)$$

$$c = 2r^2(\sigma(\mu_2 + 2\mu_1) + \sigma\Upsilon(3y^2 + \mu_1^2) + \beta\mu_3 - 4\beta y + 2\beta\Upsilon\mu_1y). \quad (26)$$

### 3.4 Localisation de la bifurcation

La bifurcation en point limite/Hopf se produira lorsque les coefficients  $a$  et  $c$  du polynôme caractéristique  $p(\lambda)$  sont nuls et le coefficient  $b$  est positif, car alors  $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + b)$ . Nous allons tenter d'annuler  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $a$  et  $c$  en exprimant  $r^2$ ,  $y$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$  en fonction de  $\mu_1$ . En résolvant  $a = 0$  (24) et  $c = 0$  (26), on obtient

$$\mu_2 = -\mu_1 - 2\Upsilon\mu_1^2 - 2\Upsilon y^2$$

et

$$\mu_3 = \frac{4\beta y - \sigma\Upsilon y^2 - \sigma\mu_1 - 2\beta\Upsilon\mu_1y + \sigma\Upsilon\mu_1^2}{\beta}. \quad (27)$$

En substituant ces expressions dans l'équation  $\dot{y} = 0$  (21), on obtient l'équation cubique

$$y^3 + \left(\frac{3\beta^2\Upsilon\mu_1 - 2\beta^2 - \Upsilon\mu_1}{2\sigma\beta\Upsilon}\right) y^2 + \left(\frac{2 - \Upsilon\mu_1}{\Upsilon}\right) \mu_1 y + \left(\frac{\beta^2 - 1 + (\beta^2 + 1)\Upsilon\mu_1}{2\sigma\beta\Upsilon}\right) \mu_1^2 = 0, \quad (28)$$

que nous allons résoudre en utilisant les formules données par SPIEGEL [29]. Puisque le discriminant

$$-\mu_1^2 \frac{\beta^2 + 1}{108\Upsilon^4} \left( 2\beta^2 - (7\beta^2 + 13)\Upsilon\mu_1 + \mathcal{O}(\mu_1^2) \right)$$

est négatif pour  $|\mu_1|$  petit, alors l'équation (28) possède trois racines réelles. Pour les trouver, on doit d'abord calculer (voir SPIEGEL [29])

$$S = \frac{\sigma\beta}{3\Upsilon} - \frac{\sigma(5 + 3\beta^2) - \operatorname{sgn}\beta\sqrt{-6(\beta^2 + 1)}}{6\beta}\mu_1 + \mathcal{O}(\mu_1^2)$$

et

$$T = \frac{\sigma\beta}{3\Upsilon} - \frac{\sigma(5 + 3\beta^2) + \operatorname{sgn}\beta\sqrt{-6(\beta^2 + 1)}}{6\beta}\mu_1 + \mathcal{O}(\mu_1^2).$$

En posant  $A$  comme étant le tiers du coefficient de  $y^2$  dans l'équation cubique (28), les trois racines sont alors données par

$$\begin{aligned} y_1 &= S + T - A \\ y_2 &= -(S + T)/2 - A + i\sqrt{3}(S - T)/2 \\ y_3 &= -(S + T)/2 - A - i\sqrt{3}(S - T)/2. \end{aligned}$$

La première racine,

$$y_1 = \frac{\sigma\beta}{\Upsilon} - 3\sigma\frac{\beta^2 + 1}{2\beta}\mu_1 - 5\sigma\Upsilon\frac{\beta^2 + 1}{2\beta}\mu_1^2 + \mathcal{O}(\mu_1^3),$$

n'est pas locale, donc  $\mu_3$  tel que donné par (27) n'est pas près de l'origine. Cette racine nous intéresse donc pas. Les deux autres sont données par

$$y_{2,3} = \frac{2\sigma - s \operatorname{sgn}\beta\sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{2\beta}\mu_1 + \mathcal{O}(\mu_1^2),$$

où  $s = \pm 1$ , ce qui implique d'après (22) que

$$r^2 = \frac{4\sigma - 3s \operatorname{sgn}\beta\sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{2\sigma\beta^2}\mu_1^2 + \mathcal{O}(\mu_1^3).$$

Le coefficient  $b$  (25) du polynôme caractéristique  $p(\lambda)$  (23) vaut maintenant

$$b = -\frac{\beta^2 + 5 - 4\sigma s \operatorname{sgn}\beta\sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{\beta^2}\mu_1^2 + \mathcal{O}(\mu_1^3).$$

Puisque  $b$  et  $r^2$  doivent être positifs, on en déduit des conditions sur les signes  $s$ ,  $\sigma$  et la valeur  $\beta$  :

Voir p. 53 **Lemme 6.** *Les coefficients*

$$\frac{-(\beta^2 + 5) + 4\sigma s \operatorname{sgn} \beta \sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{\beta^2}$$

et

$$\frac{4\sigma - 3s \operatorname{sgn} \beta \sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{2\beta^2},$$

où  $s = \pm 1$ ,  $\sigma = \pm 1$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , sont positifs lorsque  $\sigma = -1$ ,  $s = -\operatorname{sgn} \beta$  et  $|\beta| < \sqrt{11 + 8\sqrt{2}}$ .

Ainsi, lorsque  $\mu_1$  est suffisamment petit,  $b$  et  $r^2$  seront positifs si les conditions sur  $\sigma$  et  $\beta$  données au lemme précédent sont satisfaites.

En résumé, en supposant  $\mu_3 \neq 0$ , il y aura une bifurcation de type point limite/Hopf dans le système d'équations (11) lorsque

$$\sigma = -1$$

$$|\beta| < \sqrt{11 + 8\sqrt{2}}$$

$$\mu_2^* = -\mu_1 + \mathcal{O}(\mu_1^2) \quad (29)$$

$$\mu_3^* = \frac{-3 + 2\sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{\beta} \mu_1 + \mathcal{O}(\mu_1^2). \quad (30)$$

Le point d'équilibre qui bifurque est alors

$$r^{*2} = \frac{-4 + 3\sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{2\beta^2} \mu_1^2 + \mathcal{O}(\mu_1^3) \quad (31)$$

$$x^* = -\mu_1 \quad (32)$$

$$y^* = \frac{-2 + \sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{2\beta} \mu_1 + \mathcal{O}(\mu_1^2). \quad (33)$$

Remarquez que  $\Upsilon$  n'apparaît pas dans ces formules. En fait, tous les termes d'ordre 3 du système (9) apparaissent dans les termes d'ordres supérieurs  $\mathcal{O}(\mu_1^2)$  (ou  $\mathcal{O}(\mu_1^3)$  dans le cas de  $r^{*2}$ ) des formules (29) à (33).

### 3.5 Bifurcations en point limite et de Hopf

Puisqu'une bifurcation de type point limite/Hopf est issue d'une interaction entre une bifurcation en point limite et une bifurcation de Hopf, nous allons identifier, du moins à l'aide de formules implicites, les surfaces dans l'espace des paramètres sur lesquelles se produisent ces bifurcations. Nous utiliserons ces expressions pour les simulations numériques du chapitre 4. Nous supposons, pour cette section et les suivantes, que  $\sigma = -1$  et que  $\beta^2 < 11 + 8\sqrt{2}$ .

Commençons par la bifurcation en point limite. Cette dernière se produira lorsque le coefficient constant  $c$  (26) du polynôme caractéristique  $p(\lambda)$  (23) est nul. En résolvant  $\dot{x} = 0$  (20), on obtient une expression pour  $r^2$ , que l'on substitue dans l'équation  $c = 0$ . Cette dernière est un quadratique en  $y$ , dont les deux solutions sont

$$y = \frac{\beta(-2 + \Upsilon\mu_1) + s\sqrt{\beta^2(2 - \Upsilon\mu_1)^2 - 3\Upsilon(2\mu_1 + \mu_2 - \beta\mu_3 + \Upsilon\mu_1^2)}}{3\Upsilon},$$

où  $s = \pm 1$ . Or, lorsque  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \rightarrow 0$ , ces solutions tendent vers

$$\frac{-2\beta + 2s\sqrt{\beta^2}}{3\Upsilon}.$$

Ainsi, en posant  $s = \text{sgn } \beta$ , l'expression ci-haut est nulle, ce qui implique que la solution choisie est locale à la bifurcation. En substituant les expressions pour  $r^2$  et  $y$  dans l'équation  $\dot{y} = 0$  (21), on obtient une surface implicite  $S_F$  dans l'espace des paramètres sur laquelle ont lieu les bifurcations en point limite. En développant  $S_F$  en série de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned} S_F = & -\frac{1}{2\beta}\mu_1^2 - \frac{2\beta^2 + 1}{2\beta}\mu_1\mu_2 - \frac{1}{2}\mu_1\mu_3 \\ & - \frac{1}{8\beta}\mu_2^2 + \frac{1}{4}\mu_2\mu_3 - \frac{1}{8\beta}\mu_3^2 + \mathcal{O}(\|\mu\|^3). \end{aligned} \quad (34)$$

La surface sur laquelle ont lieu les bifurcations de Hopf est plus difficile à cerner. Supposons que le discriminant

$$\frac{1}{729}(3b - a^2)^3 + \frac{1}{2916}(9ab - 27c - 2a^3)^2 \quad (35)$$

du polynôme caractéristique  $p(\lambda)$  (23) est positif. Ainsi  $p(\lambda)$  possède une racine réelle et une paire de racines complexes conjuguées, que nous dénoterons par  $w$  et  $u \pm iv$ . D'après SPIEGEL [29], les trois équations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} a &= -(w + 2u) \\ b &= 2wu + u^2 + v^2 \\ c &= -w(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

Il y a bifurcation de Hopf lorsque  $u = 0$  (et  $v, w \neq 0$ ). Avec cette condition, les trois équations ci-haut se réduisent à

$$\begin{aligned} a &= -w \\ b &= v^2 \\ c &= -wv^2, \end{aligned}$$

d'où on tire les deux conditions suivantes, nécessaires pour avoir une bifurcation de Hopf :

$$ab = c \text{ et } b > 0. \quad (36)$$

Ces conditions sont par ailleurs suffisantes, puisqu'en substituant  $c = ab$  dans l'expression pour le discriminant (35), on obtient la valeur positive

$$\frac{1}{27}b(a^2 + b)^2.$$

Or, l'équation  $ab - c$  est un polynôme de degré 6 en  $y$  et l'équation  $\dot{y}$  est de degré 3 en  $y$ . Il est donc très difficile, voire impossible, d'éliminer la variable  $y$  et d'obtenir une expression simple  $S_H(\mu)$  décrivant implicitement la surface cherchée. Si le calcul de la surface en éliminant la variable  $y$  s'avère trop complexe, l'intersection des deux surfaces  $ab - c = 0$  et  $\dot{y} = 0$  pourra être calculée dans l'espace à 4 dimensions  $(y, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  et projetée dans l'espace des paramètres.

### 3.6 Forme normale

Afin d'étudier convenablement la bifurcation en point limite/Hopf identifiée à la section 3.4, nous devons calculer les coefficients de la forme normale de cette dernière,



aux valeurs critiques  $\mu_2^*$  et  $\mu_3^*$  des paramètres. Les formules pour ces coefficients sont données au lemme 5, qui s'applique une fois que le système d'équations (11) est exprimé sous la forme (13). Pour ce faire, la première étape consiste à déplacer le point d'équilibre qui bifurque à l'origine en posant

$$\begin{aligned} w &= r^2 - r^{*2} \\ u &= x - x^* \\ v &= y - y^*, \end{aligned} \tag{37}$$

où  $r^{*2}$ ,  $x^*$  et  $y^*$  sont donnés par les équations (31), (32) et (33). En utilisant les trois égalités  $\dot{r} = 0$ ,  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{y} = 0$ , données par (19), (20) et (21), on obtient le nouveau système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 2(w + r^{*2})u \\ \dot{u} &= (\mu_2 + 3\Upsilon x^{*2} + \Upsilon y^{*2})u + (-\mu_3 + 4y^* + 2\Upsilon x^*y^*)v - w \\ &\quad + 3\Upsilon x^*u^2 + 2\Upsilon y^*uv + (2 + \Upsilon x^*)v^2 + \Upsilon u^3 + \Upsilon uv^2 \\ \dot{v} &= (\mu_3 - 2y^* + 2\Upsilon x^*y^*)u + (\mu_2 - 2x^* + \Upsilon x^{*2} + 3\Upsilon y^{*2})v + \beta w \\ &\quad + \Upsilon y^*u^2 + (2\Upsilon x^* - 2)uv + 3\Upsilon y^*v^2 + \Upsilon u^2v + \Upsilon v^3, \end{aligned}$$

dont le jacobien, évalué à l'origine et aux valeurs de paramètres critiques  $\mu_2 = \mu_2^*$  (29),  $\mu_3 = \mu_3^*$  (30), est

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 2r^{*2} & 0 \\ -1 & \mu_2^* + 3\Upsilon x^{*2} + \Upsilon y^{*2} & -\mu_3^* + 4y^* + 2\Upsilon x^*y^* \\ \beta & \mu_3^* - 2y^* + 2\Upsilon x^*y^* & \mu_2^* - 2x^* + \Upsilon x^{*2} + 3\Upsilon y^{*2} \end{bmatrix}.$$

Puisque  $J$  est évalué au point d'équilibre et aux valeurs critiques où se produit une bifurcation de type point limite/Hopf, son polynôme caractéristique  $q(\lambda)$  doit être de la forme  $\lambda^3 + \Lambda^2\lambda$ . En calculant les trois coefficients de  $q(\lambda)$  à partir de  $J$  et en l'égalant à  $\lambda^3 + \Lambda^2\lambda$ , on obtient les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= -2\mu_2^* + 2x^* - 4\Upsilon(x^{*2} + y^{*2}) \\ \Lambda^2 &= \mu_2^{*2} + \mu_3^{*2} + 2r^{*2} - 2\mu_2^*x^* - 6\mu_3^*y^* + 8y^{*2} \\ &\quad + \Upsilon(4\mu_2^*(x^{*2} + y^{*2}) - 6x^{*3} - 6x^*y^{*2}) + 3\Upsilon^2(x^{*2} + y^{*2})^2 \\ 0 &= \mu_2^* - \beta\mu_3^* - 2x^* + 4\beta y^* + \Upsilon(x^{*2} + 2\beta x^*y^* + 3y^{*2}). \end{aligned} \tag{38}$$

Le changement de base permettant d'exprimer  $J$  sous sa forme canonique réelle de Jordan est donné par la matrice  $K$  qui satisfait à l'équation

$$KJ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \\ 0 & \Lambda & 0 \end{bmatrix} K.$$

En utilisant les équations (38), on peut vérifier que la matrice

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\kappa(2r^{*2} - \Lambda^2)}{2r^{*2}} & \beta & 1 \\ \kappa & \beta & 1 \\ 0 & -\Lambda\kappa & 0 \end{bmatrix},$$

où

$$\kappa = \frac{1}{\mu_3^* - 4y^* - 2\Upsilon x^* y^*}, \quad (39)$$

satisfait à cette équation. Puisque

$$\det K = \frac{\kappa^2 \Lambda^3}{2r^{*2}} \neq 0,$$

on peut effectuer le changement de variables

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

et regrouper  $\xi_2$  et  $\xi_3$  pour former la variable complexe  $\zeta$  en posant

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 \\ \zeta &= \xi_2 + i\xi_3. \end{aligned}$$

Ces changements de variables nous permettent d'obtenir un système d'équations de la forme du système (13). En effectuant ces calculs, on obtient par exemple

$$\tilde{g}_{200}^* = \tilde{g}_{200}(\mu_2^*, \mu_3^*) = 8 \frac{r^{*4}(2\beta + \beta\Upsilon x^* + 3\Upsilon y^*)}{\Lambda^4}.$$

Sans donner explicitement les expressions pour les autres coefficients  $\tilde{g}_{ijk}^*$  et  $\tilde{h}_{ijk}^*$ , mentionnons que  $\tilde{g}_{011}^* \neq 0$ . Les formules données au lemme 5 nous permettent de calculer  $s^*$  et  $\theta^*$  et de vérifier que  $\Sigma^* \neq 0$ . On obtient

$$\theta^* = \frac{\Upsilon y^*}{r^{*2}(2\beta + \beta\Upsilon x^* + 3\Upsilon y^*)} \Lambda^2 - \frac{1}{2}$$

et

$$s^* = \operatorname{sgn} \left[ (2\beta + \beta\Upsilon x^* + 3\Upsilon y^*)^2 \kappa^2 (\Lambda^2 - 2r^{*2})^2 + (2\beta + \beta\Upsilon x^* + 3\Upsilon y^*)(2\beta + \beta\Upsilon x^* + \Upsilon y^*)(\beta^2 + 1)\Lambda^2 \right],$$

qui se résument, en remplaçant  $r^{*2}$ ,  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $\mu_2^*$ ,  $\mu_3^*$  et  $\kappa$  par leur valeur en fonction de  $\mu_1$  (voir équations (29) à (33) et (39)), à

$$\theta^* = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(\mu_1)$$

et

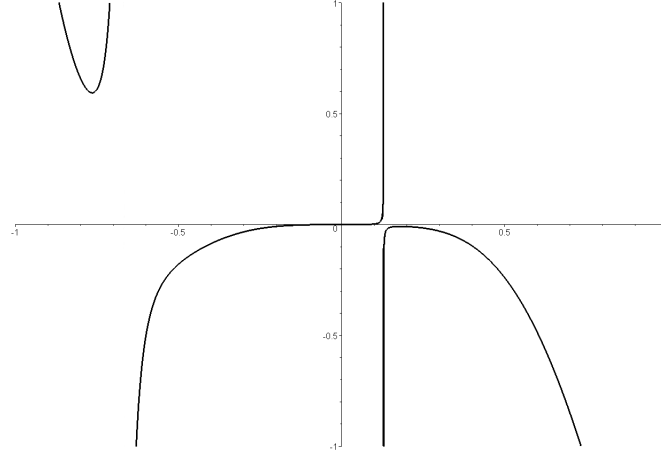
$$s^* = \operatorname{sgn} \left[ \left( Q + 4\beta^2(\beta^2 + 1) \frac{d^2 b^*}{d\mu_1^2}(0) \right) \mu_1^2 + \mathcal{O}(\mu_1^3) \right],$$

où  $Q$  est un carré et  $b^*(\mu_1) = \Lambda^2(\mu_1)$  est donné par (38).  $\theta^*$  est donc toujours négatif lorsque  $\mu_1$  est suffisamment petit. Puisque  $b^*(\mu_1)$  est un coefficient positif pour  $|\mu_1|$  suffisamment petit, le premier terme de son développement en série de Taylor,  $\frac{d^2 b^*}{d\mu_1^2}(0)$ , est positif, ce qui implique que  $s^* = 1$ .

Finalement, il ne reste plus qu'à vérifier que  $\Sigma^* \neq 0$ . Le calcul de ce coefficient est cependant passablement ardu. Toujours avec les formules du lemme 5, on obtient une expression de la forme

$$\Sigma^*(\mu_1) = S(\beta)\mu_1^{-1} + \mathcal{O}(\mu_1^0),$$

où l'expression  $S(\beta)$  est particulièrement gigantesque. Le graphique de la figure 5 est le graphe de  $S(\beta)$  pour  $\beta$  entre  $-1$  et  $1$ . Pour les autres valeurs de  $\beta$ , on a  $|S(\beta)| \gg 1$ . Autrement dit,  $\Sigma^*$  est différent de 0 pour presque tout choix de  $\beta$ .

FIG. 5 –  $S$  en fonction de  $\beta$ .

### 3.7 Interprétation géométrique

Fixons  $\mu_1$  près de l'origine,  $\beta$  tel que  $|\beta| < \sqrt{11 + 8\sqrt{2}}$  et  $\Upsilon$  arbitraire. Connaissant  $s^*$  et  $\theta^*$ , nous pouvons décrire de façon théorique le comportement du flot du système tridimensionnel (11) dans un voisinage de  $(r^*, x^*, y^*)$  lorsque les paramètres  $(\mu_2, \mu_3)$  varient dans un voisinage de  $(\mu_2^*, \mu_3^*)$ ,  $\mu_1$  demeurant inchangé. Cette description n'est valide que lorsque  $\Sigma^* > 0$ . Dans le cas contraire, toutes les stabilités doivent être inversées pour que la description demeure valide car nous avons inversé le temps pour obtenir le système (15).

Puisque nous avons montré que  $s^* = 1$  et que  $\theta^* < 0$ , le diagramme de bifurcation de (11) correspond au diagramme donné à la figure 3, c'est-à-dire que le diagramme de bifurcation de (11) est topologiquement équivalent à celui de la figure 3 si on remplace  $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0)$  par  $(\mu_2, \mu_3) = (\mu_2^*, \mu_3^*)$ .

Jusqu'à présent nous avons décrit le flot près de la bifurcation de type point limite/Hopf dans le système tridimensionnel (11). Afin de transposer ces descriptions pour le système quadridimensionnel (5), il suffit d'ajouter une rotation. La courbe de bifurcation de Hopf visible à la figure 3 est donc une bifurcation de Neimark-Sacker et celle de Neimark-Sacker, celle d'une bifurcation plus ésotérique où un hypertore

est engendré d'un tore. Concrètement, il y a d'abord la région  $\boxed{\text{A}}$ , où il n'y a rien d'intéressant localement. Puis, soudainement, alors que  $(\mu_2, \mu_3)$  pénètrent dans la région  $B$ , il y a création de deux cycles limites. Ces deux cycles s'éloignent au fur et à mesure que  $(\mu_2, \mu_3)$  s'éloignent de la courbe de bifurcation. Éventuellement, un des cycles limites subira une bifurcation de Neimark-Sacker, changera de stabilité et engendrera un tore (instable si on suppose que  $\Sigma^* > 0$ ). Nous sommes maintenant dans la région  $\boxed{\text{C}}$  et l'ampleur du tore augmente tandis que  $(\mu_2, \mu_3)$  s'éloignent de la courbe de bifurcation de Neimark-Sacker. Lorsque les paramètres entrent dans la région  $\boxed{\text{D}}$ , une bifurcation complexe se produit : le tore change de stabilité et engendre un hypertore. Cependant, cet hypertore se désintègre rapidement alors que  $(\mu_2, \mu_3)$  passent dans la région  $\boxed{\text{E}}$ . Le tore, qui est toujours présent, diminue peu à peu de taille et finit par s'écraser sur le deuxième cycle limite. Alors que  $(\mu_2, \mu_3)$  complètent leur parcours autour de  $(\mu_2^*, \mu_3^*)$ , les deux cycles limites se rapprochent pour finalement s'annihiler lorsque  $(\mu_2, \mu_3)$  passent de la région  $\boxed{\text{F}}$  et la région  $\boxed{\text{A}}$ .

# Chapitre 4

## Simulations numériques

### 4.1 Processus de création d'un hypertore

Nous avons décrit, à la section 3.7, les différents diagrammes de phase près de la bifurcation en point limite/Hopf. Il est maintenant temps de vérifier à l'aide de simulations numériques la véracité de cette description théorique. Fixons donc

$$\mu_1 = -0,05$$

$$\sigma = -1$$

$$\beta^* = -0,2$$

$$\Upsilon^* = 0,05$$

et simulons le système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(-0,05 + x) \\ \dot{x} &= \mu_2 x - \mu_3 y + 2y^2 - r^2 + \Upsilon^* x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \mu_3 x + \mu_2 y - 2xy + \beta^* r^2 + \Upsilon^* y(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{40}$$

pour  $(\mu_2, \mu_3)$  dans un voisinage de  $(\mu_2^*, \mu_3^*) = (0,0492643, -0,0297026)$ . Le polynôme caractéristique du jacobien de (40) évalué en  $(\mu_2^*, \mu_3^*)$  et au point d'équilibre  $(r, x, y) = (0,100624, 0,05, -0,0696912)$  est  $\lambda^3 + 0,0450308\lambda$ . En effectuant le changement de

variables (37) pour déplacer le point d'équilibre à l'origine, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{w} &= 2u(w + 0,0101253) \\ \dot{u} &= 0,0498821u - 0,249410w - w + 0,0075u^2 - 0,00696912uv + 2,0025v^2 \\ &\quad + 0,05u^3 + 0,05uv^2 \\ \dot{v} &= 0,109331u - 0,0498821v - 0,2w - 0,00348456u^2 - 0,1.995uv - 0,0104536v^2 \\ &\quad + 0,05u^2v + 0,05v^3.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,90625 & -0,2 & 1 \\ -4,00944 & -0,2 & 1 \\ 0 & -0,850824 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

puis en posant  $\xi = \xi_1$ ,  $\zeta = \xi_2 + i\xi_3$ , on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -0,0831095\xi^2 - 0,352417\zeta\bar{\zeta} + \dots \\ \dot{\zeta} &= 0,212204i\zeta + (0,0768414 - 1,52049i)\xi\zeta + \dots,\end{aligned}$$

dont les coefficients servent à calculer  $\theta^*$ ,  $s^*$  et  $\Sigma^*$  à l'aide des formules données au lemme 5. On obtient alors

$$\begin{aligned}\theta^* &= -0,462290 \\ s^* &= \operatorname{sgn} 0,0585784 \\ \Sigma^* &= 0,00956093.\end{aligned}$$

Puisque  $\Sigma^* > 0$ , les diagrammes de phase du système d'équations (40) devraient être équivalents aux diagrammes de la figure 4 à la page 20.

Commençons par tracer, dans le plan  $(\mu_2, \mu_3)$ , les courbes de bifurcation en point limite et de Hopf. D'après (34), les bifurcations en point limite se produiront sur la courbe

$$\begin{aligned}-\frac{10850419}{5000000} + \frac{133}{50}\mu_2 + \frac{73}{125}\mu_3 \\ + \left( \frac{116921}{45000000} - \frac{1}{450}\mu_2 - \frac{1}{2250}\mu_3 \right) \sqrt{701526 - 600000\mu_2 - 120000\mu_3},\end{aligned}$$

tandis que d'après (36) les bifurcations de Hopf se produiront sur la courbe

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2000}y^6 - \left(\frac{11}{200}\mu_2 + \frac{1437209}{800000}\right)y^4 + \left(\frac{13}{10}\mu_3 - \frac{641601}{200000}\right)y^3 \\
& - \left(\frac{1}{5}\mu_3^2 + \frac{3}{5}\mu_2^2 - \frac{2403}{1000}\mu_3 + \frac{797611}{40000}\mu_2 - \frac{253765191}{320000000}\right)y^2 \\
& - \left(\frac{2}{5}\mu_3^2 - 14\mu_3\mu_2 + \frac{477}{800}\mu_3 + \frac{801}{10000}\mu_2 - \frac{801}{80000000}\right)y \\
& + \left(2\mu_3^2\mu_2 + 2\mu_2^3 - \frac{199}{2000}\mu_3^2 - \frac{1}{50}\mu_3\mu_2 - \frac{397}{2000}\mu_2^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{400000}\mu_3 + \frac{316011}{32000000}\mu_2 + \frac{477603}{128000000000}\right),
\end{aligned}$$

où  $y$  est une racine réelle de

$$\frac{1}{20}y^3 - \frac{801}{2000}y^2 + \left(\frac{1}{5}\mu_3 + \mu_2 - \frac{799}{80000}\right)y + \left(\frac{1}{20}\mu_3 - \frac{1}{100}\mu_2 - \frac{1}{800000}\right)$$

et la condition

$$\frac{3}{400}y^4 + \left(\frac{1}{5}\mu_2 + \frac{959203}{80000}\mu_2\right)y^2 - 8\mu_3y + \left(\mu_3^2 + \mu_2^2 + \frac{1}{2000}\mu_2 - \frac{1597}{64000000}\right) > 0$$

est satisfaite. Ces deux courbes sont représentées dans le plan  $(\mu_2, \mu_3)$  à la figure 6. La courbe mauve (à droite) est la courbe de bifurcation en point limite et la courbe brune (à gauche) est celle de Hopf. Remarquez que ces deux courbes sont tangentes en  $(\mu_2^*, \mu_3^*)$ .

Avant d'explorer les divers diagrammes de phase du système (40), traçons l'amplitude  $r$  des branches de points fixes en fonction de  $\mu_2$  pour deux valeurs de  $\mu_3$ , soient  $-0,023$  et  $-0,035$ . La position de ces branches dans l'espace des paramètres est indiquée par deux traits noirs dans le graphique de la figure 6. Le résultat, visible à la figure 7, est en accord avec la théorie présentée à la section 3.7. En effet, dans la région  $\boxed{\text{A}}$  de l'espace des paramètres, il n'y a pas de points fixes (locaux) tels que  $r > 0$ . Dès la traversée de la courbe de bifurcation en point limite, il y a création de deux points fixes qui s'éloignent l'un de l'autre. La différence entre les régions  $\boxed{\text{B}}$  et  $\boxed{\text{F}}$  est la stabilité des deux points fixes. Dans la région  $\boxed{\text{B}}$ , il y a un point fixe instable (branche mauve) et un point fixe ayant une composante stable et deux instable (branche rose) tandis



FIG. 6 – Diagramme de bifurcation dans le plan  $\mu_1 = -0,05$

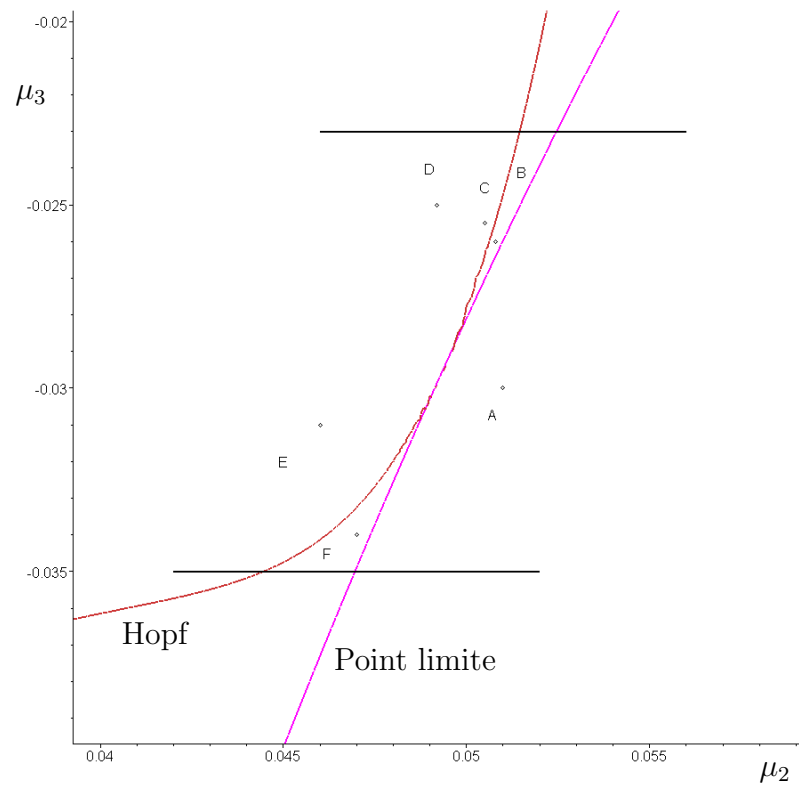
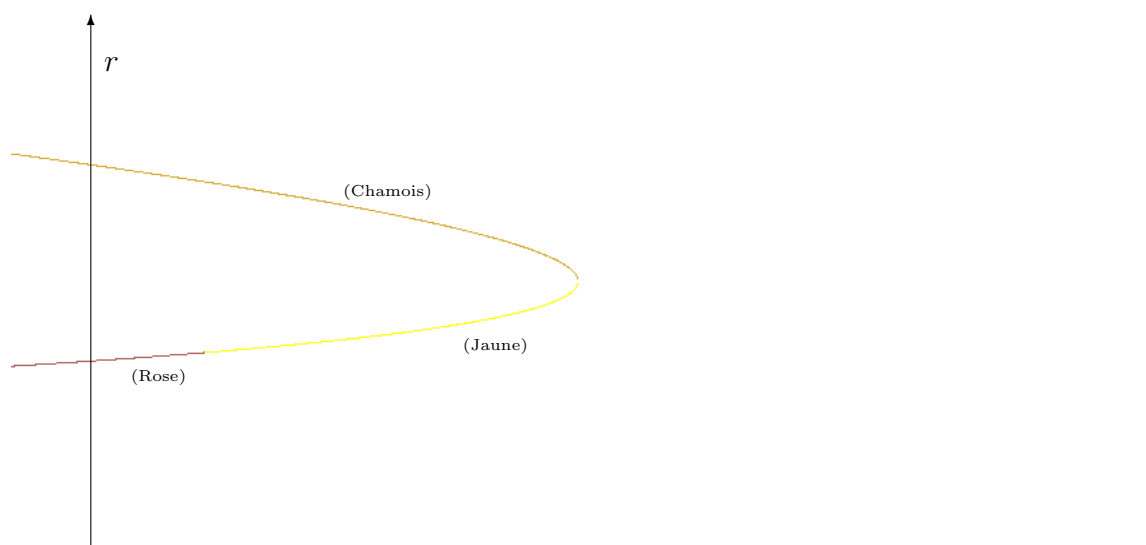
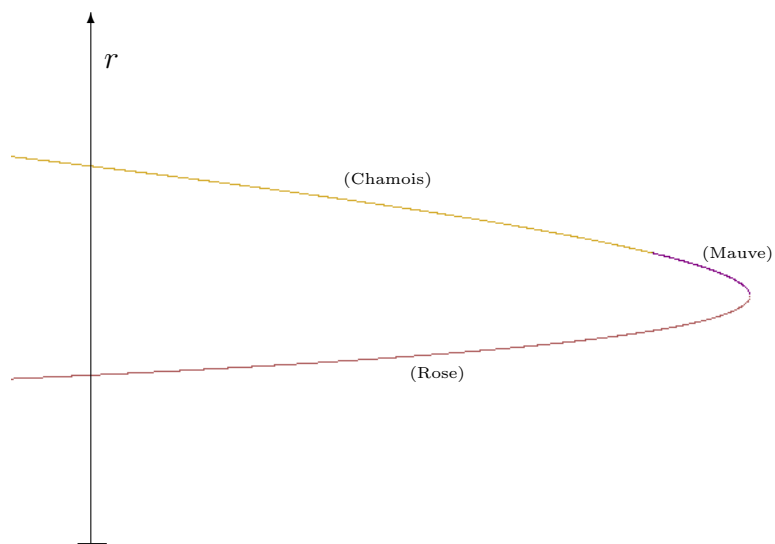


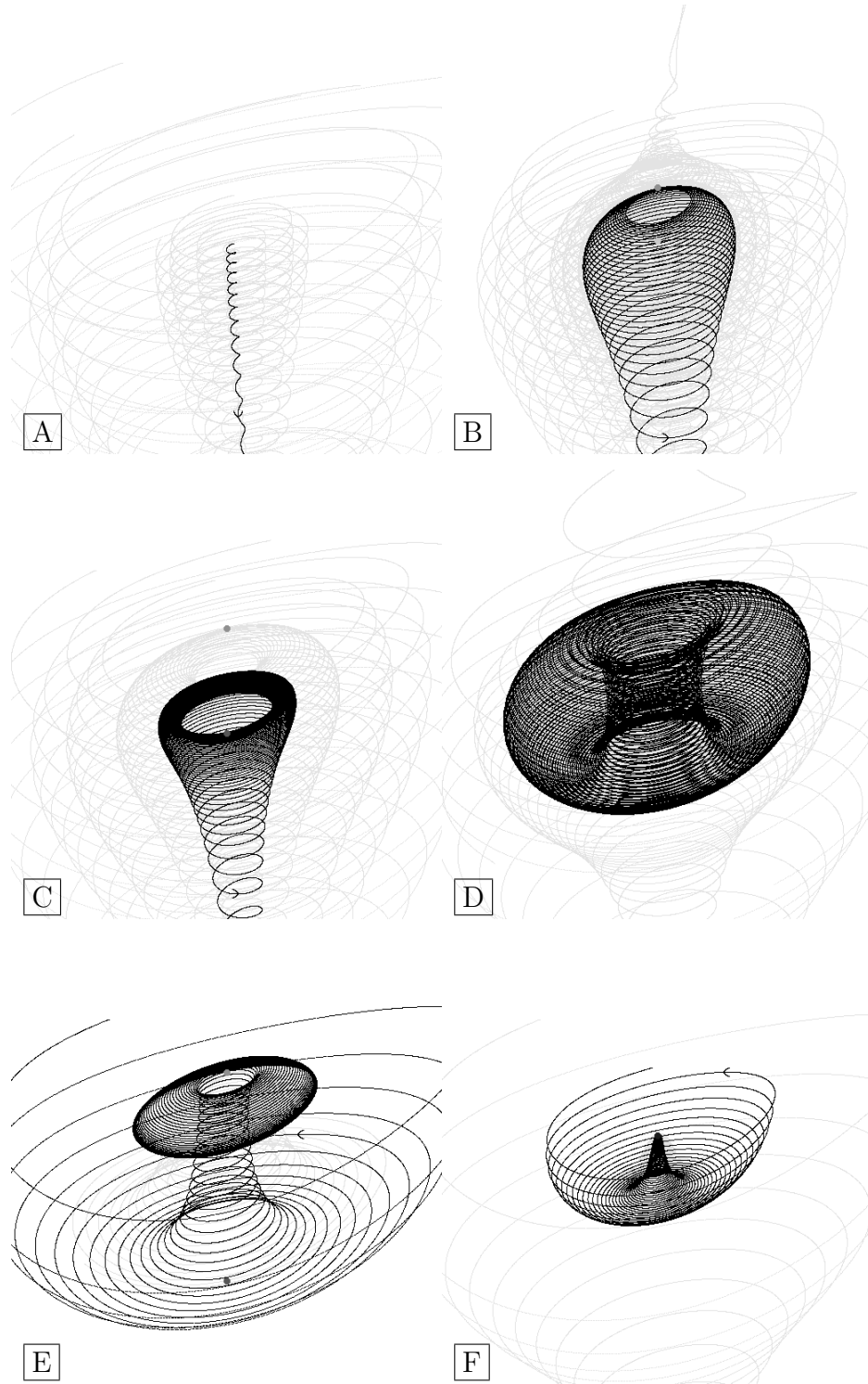
FIG. 7 – Amplitude  $r$  des branches de points fixes en fonction de  $\mu_2$



que dans la région  $\boxed{\text{F}}$ , il y a un point fixe stable (branche jaune) et un point fixe ayant une composante instable et deux stables (branche chamois). Lors du passage de la région  $\boxed{\text{B}}$  à la région  $\boxed{\text{C}}$ , le point d'équilibre (instable) de la branche supérieure subit une bifurcation de Hopf et transmet une partie de son instabilité à un cycle limite, tandis que lors du passage de la région  $\boxed{\text{F}}$  à la région  $\boxed{\text{E}}$ , c'est le point d'équilibre (stable) de la branche inférieure qui subit une bifurcation de Hopf et qui transmet une partie de sa stabilité à un cycle limite stable. La seule information que ces branches ne véhiculent pas, c'est ce qui arrive au cycle entre les régions  $\boxed{\text{C}}$  et  $\boxed{\text{E}}$  afin qu'il change de stabilité. Comme mentionné précédemment, ce cycle subira une bifurcation de Neimark-Sacker et transmettra son instabilité à un tore (région  $\boxed{\text{D}}$ ), qui sera éventuellement détruit lors du passage à la région  $\boxed{\text{E}}$ . Il ne reste plus qu'à présenter, à la figure 8, un diagramme de phase pour chacune de ces régions. Les valeurs exactes des paramètres pour les six diagrammes sont représentées par des points sur le diagramme de bifurcation de la figure 6. On voit très bien, dans le troisième diagramme (région  $\boxed{\text{C}}$ ), un cycle périodique instable, autour duquel le flot tourne un grand nombre de fois avant de s'échapper vers l'extérieur du voisinage considéré. Le quatrième diagramme (région  $\boxed{\text{D}}$ ) présente le tore dans toute sa splendeur. Les valeurs des paramètres étant très près de la bifurcation de Neimark-Sacker, le tore est *peu instable* dans le sens où l'orbite accomplit de nombreuses révolutions près de sa surface avant de s'échapper vers l'infini ou vers le cycle périodique situé à l'intérieur du tore, selon si l'orbite est à l'extérieur ou à l'intérieur du tore. Finalement, le cycle périodique stable est parfaitement visible dans le cinquième diagramme (région  $\boxed{\text{E}}$ ).

Finalement, mentionnons que nous avons choisi  $\Upsilon^*$  près de 0 afin de bien démontrer le comportement de la bifurcation. Il a été difficile de faire un choix de paramètres ( $\Upsilon^*$  et  $\beta^*$ ) pour lesquels les courbes de bifurcation en point limite et de Hopf (figure 6) n'étaient pas pratiquement confondues.

FIG. 8 – Diagrammes de phase du système (40) près de  $(\mu_2^*, \mu_3^*)$



## 4.2 Les mêmes diagrammes dans le système quadridimensionnel

Soit le système d'équations

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= (\mu_1 + i)w_1 + \bar{w}_1 w_2 + iw_1^2 \bar{w}_1 \\ \dot{w}_2 &= (\mu_2 + i\mu_3 + 2i)w_2 + (\sigma + i\beta^*)w_1^2 + 2iw_1 \bar{w}_1 w_2 + \Upsilon^* w_2^2 \bar{w}_2,\end{aligned}\quad (41)$$

où  $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $\mu_1 = -0,05$ ,  $\sigma = -1$ ,  $\beta^* = -0,2$  et  $\Upsilon^* = 0,05$ . En effectuant le changement de variables (6)

$$\begin{aligned}w_1 &= re^{i\varphi} \\ w_2 &= (u + iv)e^{2i\varphi},\end{aligned}$$

le système d'équations (41) devient exactement le système (40) auquel s'ajoute l'équation angulaire

$$\dot{\varphi} = 1 + r^2 + v.$$

Ainsi, en traçant les diagrammes de phases de (41) pour les mêmes conditions initiales et valeurs de paramètres qu'à la figure 8, nous devrions pouvoir observer la formation de l'hypertore dans l'espace à 4 dimensions.

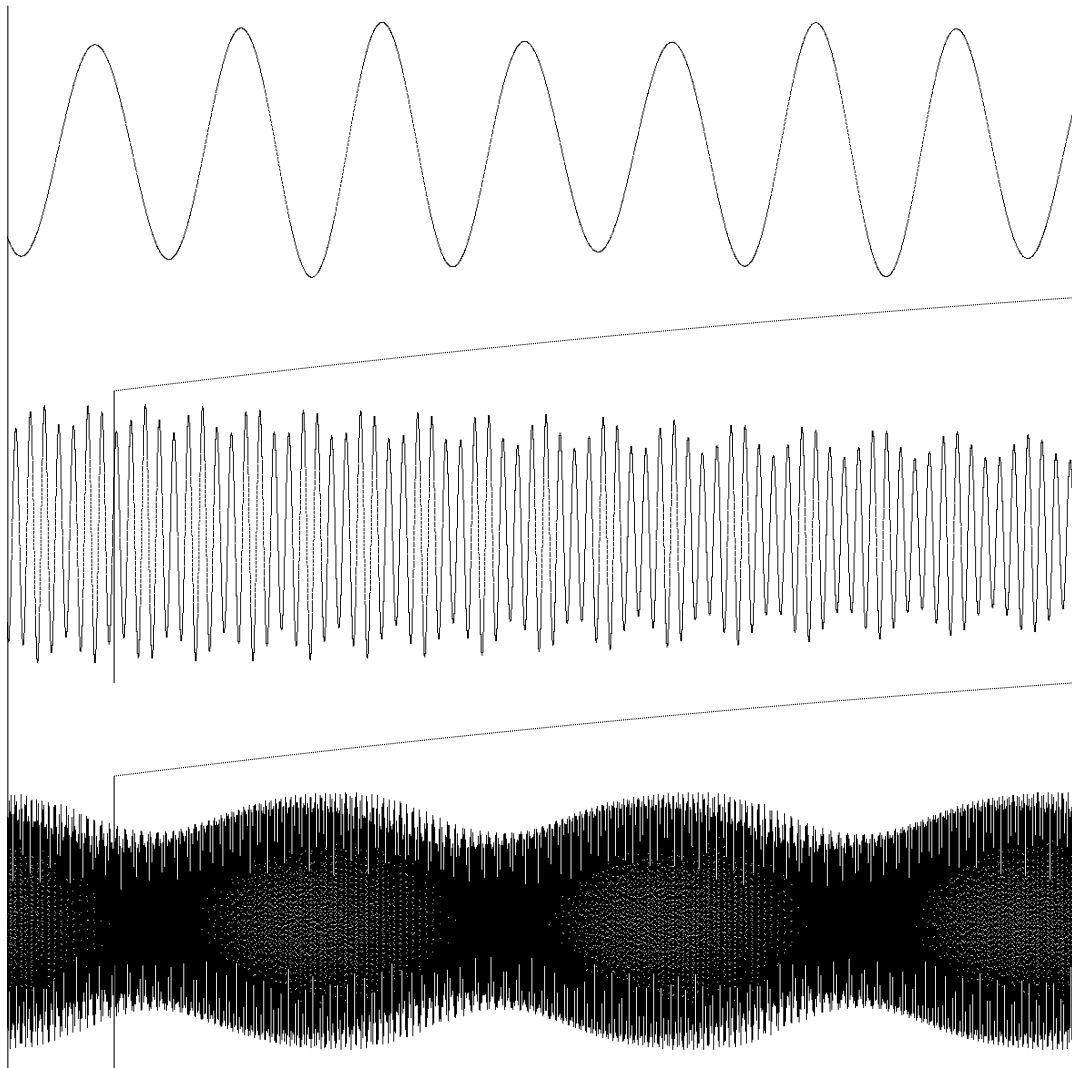
Par exemple, en choisissant les conditions initiales

$$\begin{aligned}(\mu_2, \mu_3) &= (0,04920, -0,02500) \\ (w_1, w_2) &= (0,10668, 0,04568 - 0,08174i),\end{aligned}$$

soit les mêmes conditions initiales que pour le diagramme de phase D de la figure 8, on obtient une solution gravitant très près de la surface de l'hypertore. La figure 9 présente une composante de la solution en fonction du temps, selon trois échelles différentes, ce qui nous permet d'observer les trois fréquences qui composent l'hypertore. Le premier graphique ressemble à une courbe de sinus dont l'amplitude varie légèrement, ce qui nous laisse soupçonner la présence de plus d'une fréquence. Sur le deuxième graphique, la variation de l'amplitude de la courbe de sinus est nettement visible. Comme cette amplitude varie de façon sinusoïdale, on en déduit la présence d'au

moins deux fréquences de rotation. Finalement, le troisième graphique nous révèle la présence d'une troisième fréquence de rotation, qui est d'une période beaucoup plus longue que la deuxième. À une telle échelle, la courbe de sinus du premier graphique n'est bien sûr plus qu'une suite de pics. Ces trois graphiques démontrent clairement la présence de l'hypertore.

FIG. 9 – Évolution d'une solution  $\text{Im } w_1$  de (41) en fonction de  $t$  dans la région  $\square D$  selon 3 échelles différentes



# Chapitre 5

## Conclusion

Nous avons démontré, dans cette thèse, l'existence possible d'une bifurcation de type point limite/Hopf arbitrairement près de la bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2. En fait, les conditions suivantes (en plus des conditions de non-dégénérescence données au chapitre 2) sont nécessaires et suffisantes pour garantir l'existence de la bifurcation :

$$\begin{aligned} \sigma &= -1 \\ |\beta| &< \sqrt{11 + 8\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

D'après les lemmes 2 et 4, ces conditions sont équivalentes, si  $\|\alpha\|$  est suffisamment petit, à

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(g_{0110}(\alpha)h_{2000}(\alpha)) &< 0 \\ \left| \frac{\operatorname{Im}(g_{0110}(\alpha)h_{2000}(\alpha))}{\operatorname{Re}(g_{0110}(\alpha)h_{2000}(\alpha))} \right| &< \sqrt{11 + 8\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Nous avons de plus montré que pour toutes ces valeurs de  $\beta$ , le système tridimensionnel (11) contenait un tore, dans une certaine région (touchant à l'origine) de l'espace des paramètres. Ce tore, qui correspond à un hypertore dans le système original (1), est issue d'une bifurcation de Neimark-Sacker d'un cycle limite. Nous avons donc expliqué le processus de création d'un hypertore près d'une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2.

La dynamique près de la bifurcation est d'une complexité inouïe. En effet, dans le cas particulier où  $s^* = 1$  et  $-2 < \theta^* < 0$ , l'existence dans le système (14) de toute une panoplie de structures très complexes a été démontrée, telles que des orbites homocliniques, des *horseshoes* de Smale et des cascades de doublement de période (voir KUZNETSOV [22] pour un résumé). Autrement dit, la dynamique près d'une bifurcation de type point limite/Hopf est *étrange*. La bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 est donc aussi complexe que l'interaction de mode point limite/Hopf, dont l'étude, même si elle a débuté il y a plus de 20 ans, n'est pas tout à fait terminée.



# Chapitre 6

## Démonstrations et calculs

### 6.1 Calcul de la forme normale simplifiée

**Lemme 1 (Coordonnées complexes).** *Il est possible d'effectuer un changement de coordonnées localement inversible qui transforme le système (1) en le système d'équations*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1(\alpha)z_1 + g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) \\ \dot{z}_2 = \lambda_2(\alpha)z_2 + h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha), \end{cases}$$

où  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  et où les fonctions  $g$  et  $h$  sont suffisamment différentiables pour être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) &= \sum_{2 \leq j+k+l+m \leq 3} \frac{g_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} z_1^j \bar{z}_1^k z_2^l \bar{z}_2^m + \mathcal{O}(\|z\|^4) \\ h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) &= \sum_{2 \leq j+k+l+m \leq 3} \frac{h_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} z_1^j \bar{z}_1^k z_2^l \bar{z}_2^m + \mathcal{O}(\|z\|^4), \end{aligned}$$

où les  $g_{jklm}$  et les  $h_{jklm}$  sont différentiables en  $\alpha$  pour  $\|\alpha\|$  suffisamment petit. De plus,  $\dot{\bar{z}}_1 = \bar{\dot{z}}_1$  et  $\dot{\bar{z}}_2 = \bar{\dot{z}}_2$ .

**Démonstration:**

Puisque  $f(x_0, \alpha_0) = 0$  et, par hypothèse,

$$\det D_x f(x_0, \alpha_0) = \omega_1(\alpha_0)^2 \omega_2(\alpha_0)^2 \neq 0,$$

alors, d'après le théorème de la fonction implicite, il existe, pour  $\|\alpha - \alpha_0\|$  suffisamment petit, une fonction unique  $X(\alpha)$  telle que  $X(\alpha_0) = x_0$  et  $f(X(\alpha), \alpha) = 0$ . On peut donc définir localement le changement de variable (dépendant de  $\alpha$ ) inversible suivant :

$$y = x - X(\alpha),$$

ce qui nous donne, en développant  $f$  en série de Taylor au point  $x = X(\alpha)$  :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} \\ &= f(X(\alpha), \alpha) + D_x f(X(\alpha), \alpha) \cdot (x - X(\alpha)) + \mathcal{O}(\|x - X(\alpha)\|^2) \\ &= D_y f(0, \alpha) \frac{dy}{dx} \cdot y + \mathcal{O}(\|y\|^2) \\ &= \underbrace{D_y f(0, \alpha)}_{A(\alpha)} \cdot y + F(y, \alpha). \end{aligned} \quad (42)$$

Puisque les valeurs propres de  $A(\alpha)$  sont distinctes, alors il existe des vecteurs propres  $q_{1,2}(\alpha) \in \mathbb{C}^4$  tels que

$$A(\alpha)q_i(\alpha) = \lambda_i(\alpha)q_i(\alpha)$$

et des vecteurs propres  $p_{1,2}(\alpha) \in \mathbb{C}^4$  tels que

$$A^\top(\alpha)p_i(\alpha) = \bar{\lambda}_i(\alpha)p_i(\alpha).$$

Notez que

$$\bar{\lambda}_i \langle p_j | q_i \rangle = \langle p_j | \lambda_i q_i \rangle = \langle p_j | A q_i \rangle = \langle A^\top p_j | q_i \rangle = \bar{\lambda}_j \langle p_j | q_i \rangle \quad (43)$$

et que

$$\lambda_j \langle \bar{p}_j | q_i \rangle = \langle \lambda_j \bar{p}_j | q_i \rangle = \langle A^\top \bar{p}_j | q_i \rangle = \langle p_j | A q_i \rangle = \bar{\lambda}_i \langle \bar{p}_j | q_i \rangle, \quad (44)$$

où

$$\langle p_j | q_i \rangle = \sum_{k=1}^4 p_{i_k} \bar{q}_{j_k}$$

est le produit scalaire habituel dans  $\mathbb{C}^4$ . Puisque  $\omega_1(\alpha_0) \neq \omega_2(\alpha_0)$ , alors (43) implique que

$$\langle p_2 | q_1 \rangle = \langle p_1 | q_2 \rangle = \langle q_2 | p_1 \rangle = \langle q_1 | p_2 \rangle = 0$$

et (44) implique que

$$\langle \bar{p}_j | q_i \rangle = \langle p_j | \bar{q}_i \rangle = \langle \bar{q}_i | p_j \rangle = \langle q_i | \bar{p}_j \rangle = 0.$$

Pour  $\|\alpha\|$  suffisamment petit, les valeurs propres de  $A$  sont distinctes. Ainsi, les vecteurs propres  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $\bar{q}_2$  et  $\bar{q}_1$  sont linéairement indépendants et on peut effectuer le changement de base

$$y = z_1 q_1 + z_2 q_2 + z_3 \bar{q}_2 + z_4 \bar{q}_1.$$

Immédiatement, on en déduit que  $\langle q_1 | p_1 \rangle \neq 0$  car il existe des constantes  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  telles que  $p_1 = \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_3 \bar{q}_2 + \gamma_4 \bar{q}_1$ , d'où

$$\begin{aligned} \gamma_1 \langle q_1 | p_1 \rangle &= \gamma_1 \langle q_1 | p_1 \rangle + 0 + 0 + 0 \\ &= \gamma_1 \langle q_1 | p_1 \rangle + \gamma_2 \langle q_2 | p_1 \rangle + \gamma_3 \langle \bar{q}_2 | p_1 \rangle + \gamma_4 \langle \bar{q}_1 | p_1 \rangle \\ &= \langle \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_3 \bar{q}_2 + \gamma_4 \bar{q}_1 | p_1 \rangle \\ &= \langle p_1 | p_1 \rangle \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique à  $\langle q_2 | p_2 \rangle$ . Cette condition nous permet d'effectuer les calculs suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1z_1 + 0z_2 + 0z_3 + 0z_4 \\ &= z_1 \frac{\langle q_1 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} + z_2 \frac{\langle q_2 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} + z_3 \frac{\langle \bar{q}_2 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} + z_4 \frac{\langle \bar{q}_1 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \\ &= \frac{\langle z_1 q_1 | p_1 \rangle + \langle z_2 q_2 | p_1 \rangle + \langle z_3 \bar{q}_2 | p_1 \rangle + \langle z_4 \bar{q}_1 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \\ &= \frac{\langle z_1 q_1 + z_2 q_2 + z_3 \bar{q}_2 + z_4 \bar{q}_1 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \\ &= \frac{\langle y | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
z_4 &= 0z_1 + 0z_2 + 0z_3 + 1z_4 \\
&= z_1 \frac{\langle p_1 | \bar{q}_1 \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} + z_2 \frac{\langle p_1 | \bar{q}_2 \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} + z_3 \frac{\langle p_1 | q_2 \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} + z_4 \frac{\langle p_1 | q_1 \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1 | \bar{z}_1 \bar{q}_1 \rangle + \langle p_1 | \bar{z}_2 \bar{q}_2 \rangle + \langle p_1 | \bar{z}_3 q_2 \rangle + \langle p_1 | \bar{z}_4 q_1 \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1 | \bar{y} \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1 | y \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} \quad \text{car } y \in \mathbb{R}^4 \\
&= \bar{z}_1.
\end{aligned}$$

En d'autres mots, le changement de base équivaut à effectuer le changement de variables

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\langle y | p_1(\alpha) \rangle}{\langle q_1(\alpha) | p_1(\alpha) \rangle} \in \mathbb{C} \\
z_2 &= \frac{\langle y | p_2(\alpha) \rangle}{\langle q_2(\alpha) | p_2(\alpha) \rangle} \in \mathbb{C},
\end{aligned}$$

où

$$y = z_1 q_1(\alpha) + \bar{z}_1 \bar{q}_1(\alpha) + z_2 q_2(\alpha) + \bar{z}_2 \bar{q}_2(\alpha) \in \mathbb{R}^4.$$

Ce changement de variables transforme le système (42), exprimé en coordonnées cartésiennes, au système suivant, en coordonnées complexes :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \frac{\langle \dot{y} | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle Ay + F(y, \alpha) | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle A(z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1 + z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \\
&\quad + \frac{\langle F(z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1 + z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2, \alpha) | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \\
&= \lambda_1 z_1 \frac{\langle q_1 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1 \frac{\langle \bar{q}_1 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} + \lambda_2 z_2 \frac{\langle q_2 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} + \bar{\lambda}_2 \bar{z}_2 \frac{\langle \bar{q}_2 | p_1 \rangle}{\langle q_1 | p_1 \rangle} \\
&\quad + g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) \\
&= \lambda_1(\alpha) z_1 + g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) \\
\dot{z}_2 &= \lambda_2(\alpha) z_2 + h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha),
\end{aligned}$$

où les fonctions complexes  $g$  et  $h$  sont  $\mathcal{O}(\|z\|^4)$  et de classe  $\mathcal{C}^5$  en  $z$ ,  $\mathcal{C}^1$  en  $\alpha$ . Il ne reste plus qu'à vérifier que

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{z}}_1 &= \frac{\langle p_1 | \dot{y} \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1 | A(z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1 + z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2) \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} \\
&\quad + \frac{\langle p_1 | F(z_1 q_1 + \bar{z}_1 \bar{q}_1 + z_2 q_2 + \bar{z}_2 \bar{q}_2, \alpha) \rangle}{\langle p_1 | q_1 \rangle} \\
&= \bar{\lambda}_1(\alpha) \bar{z}_1 + \bar{g}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) \\
&= \bar{\dot{z}}_1.
\end{aligned}$$

Nous avons donc exactement le système (4). □

**Lemme 2 (Forme normale).** *Il existe un changement de coordonnées localement inversible qui transforme le système (4) en la forme normale*

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= \lambda_1(\alpha) w_1 + G_{0110}(\alpha) \bar{w}_1 w_2 \\
&\quad + G_{2100}(\alpha) w_1^2 \bar{w}_1 + G_{1011}(\alpha) w_1 w_2 \bar{w}_2 + \mathcal{O}(\|w\|^4) \\
\dot{w}_2 &= \lambda_2(\alpha) w_2 + H_{2000}(\alpha) w_1^2 \\
&\quad + H_{1110}(\alpha) w_1 \bar{w}_1 w_2 + H_{0021}(\alpha) w_2^2 \bar{w}_2 + \mathcal{O}(\|w\|^4).
\end{aligned}$$

*En omettant la dépendance de  $\alpha$  pour alléger la notation, les coefficients  $G_{jklm}$  et*

$H_{jklm}$  sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
G_{0110} &= g_{0110} \\
H_{2000} &= h_{2000} \\
G_{2100} &= g_{2100} - 2 \frac{g_{2000}g_{1100}}{\lambda_1} - \frac{g_{1100}(\bar{g}_{1100} + g_{2000})}{\bar{\lambda}_1} - \frac{g_{1010}h_{1100}}{\lambda_2} \\
&\quad - \frac{g_{1001}\bar{h}_{1100}}{\bar{\lambda}_2} - 2 \frac{g_{0200}\bar{g}_{0200}}{(2\bar{\lambda}_1 - \lambda_1)} - \frac{g_{0101}\bar{h}_{0200}}{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1 + \bar{\lambda}_2} \\
G_{1011} &= g_{1011} - 2 \frac{g_{2000}g_{0011}}{\lambda_1} - \frac{g_{1100}\bar{g}_{0011}}{\bar{\lambda}_1} - \frac{g_{1010}(g_{1001} + h_{0011})}{\lambda_2} \\
&\quad - \frac{g_{1001}(g_{1010} + \bar{h}_{0011})}{\bar{\lambda}_2} - 2 \frac{g_{0020}h_{1001}}{2\lambda_2 - \lambda_1} - 2 \frac{g_{0002}\bar{h}_{0101}}{2\bar{\lambda}_2 - \lambda_1} \\
&\quad - \frac{g_{0101}\bar{g}_{0101}}{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1 + \bar{\lambda}_2} - \frac{g_{0011}(h_{1010} + \bar{h}_{0110})}{\bar{\lambda}_2 - \lambda_1 + \lambda_2} \\
H_{1110} &= h_{1110} - \frac{h_{1010}(h_{0110} + g_{1100})}{\lambda_1} - \frac{h_{0110}(h_{1010} + \bar{g}_{1100})}{\bar{\lambda}_1} \\
&\quad - 2 \frac{h_{0020}h_{1100}}{\lambda_2} - \frac{h_{0011}\bar{h}_{1100}}{\bar{\lambda}_2} - 2 \frac{h_{0200}\bar{g}_{0101}}{2\bar{\lambda}_1 - \lambda_2} \\
&\quad - \frac{h_{1001}\bar{h}_{1001}}{\lambda_1 - \lambda_2 + \bar{\lambda}_2} - \frac{h_{0101}\bar{h}_{0101}}{\bar{\lambda}_2 - \lambda_2 + \bar{\lambda}_1} - \frac{h_{1100}(g_{1010} + \bar{g}_{1001})}{\bar{\lambda}_1 - \lambda_2 + \lambda_1} \\
H_{0021} &= h_{0021} - \frac{h_{1010}g_{0011}}{\lambda_1} - \frac{h_{0110}\bar{g}_{0011}}{\bar{\lambda}_1} - \frac{h_{0011}(\bar{h}_{0011} + h_{0020})}{\bar{\lambda}_2} \\
&\quad - 2 \frac{h_{0020}h_{0011}}{\lambda_2} - 2 \frac{h_{0002}\bar{h}_{0002}}{(2\bar{\lambda}_2 - \lambda_2)} - \frac{h_{0101}\bar{g}_{0002}}{\bar{\lambda}_2 - \lambda_2 + \bar{\lambda}_1} - \frac{h_{1001}\bar{g}_{0020}}{\lambda_1 - \lambda_2 + \bar{\lambda}_2}.
\end{aligned}$$

### Démonstration:

Afin de déterminer quels seront les coefficients dits résonants dans la forme normale du système (4), considérons l'équation suivante pour  $\dot{z}_1$  :

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\alpha)z_1 + U_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) + V_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \alpha) + \mathcal{O}(\|z\|^{n+1}) \quad (45)$$

où  $U_1$  représente les termes d'ordre 2, 3, ...,  $n - 1$  de l'équation (4) tandis que  $V_1$  représente les termes d'ordre  $n$ , où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

Effectuons le changement de variable localement inversible

$$z_1 = w_1 + W_1(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \alpha) \quad (46)$$

$$z_2 = w_2 + W_2(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \alpha) \quad (47)$$

où  $W_1$  et  $W_2$  ne contiennent que des termes d'ordre  $n$  en  $z$ . En choisissant soigneusement les coefficients de  $W_1$  et de  $W_2$ , nous tenterons d'éliminer les termes d'ordre  $n$  dans l'équation (45).

En substituant (46) et (47) dans (45), on obtient

$$\dot{w}_1 + \dot{W}_1 = \lambda_1(w_1 + W_1) + U_1(w_1 + W_1, \dots) + V_1(\dots) + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}). \quad (48)$$

Notez que

$$U_1(w_1 + W_1, \bar{w}_1 + \bar{W}_1, \dots) = U_1(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \alpha) + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1})$$

et que

$$V_1(w_1 + W_1, \bar{w}_1 + \bar{W}_1, \dots) = V_1(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \alpha) + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}).$$

Ainsi, (48) devient

$$\dot{w}_1 = \lambda_1 w_1 + U_1 + \lambda_1 W_1 - \dot{W}_1 + V_1 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}). \quad (49)$$

Or,

$$\dot{W}_1 = \frac{\partial W_1}{\partial w_1} \dot{w}_1 + \frac{\partial W_1}{\partial \bar{w}_1} \dot{\bar{w}}_1 + \frac{\partial W_1}{\partial w_2} \dot{w}_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \bar{w}_2} \dot{\bar{w}}_2$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial w_1} \dot{w}_1 &= \frac{\partial W_1}{\partial w_1} (\dot{z}_1 + \mathcal{O}(\|w\|^n)) \\ &= \frac{\partial W_1}{\partial w_1} (\lambda_1 z_1 + U_1 + V_1 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}) + \mathcal{O}(\|w\|^n)) \\ &= \frac{\partial W_1}{\partial w_1} (\lambda_1 z_1 + \mathcal{O}(\|w\|^2)) \\ &= \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial w_1} (w_1 + W_1) + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}) \\ &= \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial w_1} w_1 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}) \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\dot{W}_1 = \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial w_1} w_1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \bar{w}_1} \bar{w}_1 + \lambda_2 \frac{\partial W_1}{\partial w_2} w_2 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial W_1}{\partial \bar{w}_2} \bar{w}_2 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}).$$

Remarquez que  $\dot{W}_1$  ne contient que des termes d'ordre supérieur ou égal à  $n$ . En substituant cette dernière équation dans (49), on obtient

$$\dot{w}_1 = \lambda_1 w_1 + U_1 + Z_1 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}), \quad (50)$$

où

$$Z_1 = \lambda_1 W_1 - \left( \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial w_1} w_1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \bar{w}_1} \bar{w}_1 + \lambda_2 \frac{\partial W_1}{\partial w_2} w_2 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial W_1}{\partial \bar{w}_2} \bar{w}_2 \right) + V_1.$$

Les changements de variables (46) et (47) n'ont donc pas modifié les termes d'ordre inférieur à  $n$ . Afin de simplifier l'équation (50) au maximum, on aimerait que  $Z_1$  soit nul. Puisque

$$\begin{aligned} V_1(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \alpha) &= \sum_{j+k+l+m=n} \frac{v_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} w_1^j \bar{w}_1^k w_2^l \bar{w}_2^m \\ W_1(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \alpha) &= \sum_{j+k+l+m=n} \frac{\tilde{g}_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} w_1^j \bar{w}_1^k w_2^l \bar{w}_2^m, \end{aligned}$$

alors  $Z_1$  sera nul si et seulement si

$$(\lambda_1 - \lambda_1 j - \bar{\lambda}_1 k - \lambda_2 l - \bar{\lambda}_2 m) \tilde{g}_{jklm} + v_{jklm} = 0$$

pour tout  $(j, k, l, m)$  tels que  $j + k + l + m = n$ . L'inconnu étant  $\tilde{g}_{jklm}$ , cette équation possédera une solution si

$$(\lambda_1(\alpha) - \lambda_1(\alpha)j - \bar{\lambda}_1(\alpha)k - \lambda_2(\alpha)l - \bar{\lambda}_2(\alpha)m) \neq 0$$

pour tout  $\|\alpha\|$  suffisamment petit. Puisque  $\lambda_{1,2}$  sont différentiables en  $\alpha$ , il suffit que l'équation ci-haut soit vérifiée en  $\alpha = 0$ . Plus précisément, on veut s'assurer que

$$i\omega_1(1 - j + k) + i\omega_2(-l + m) \neq 0.$$

Il faut donc éviter que

$$(1 - j + k) + 2(-l + m) = 0,$$



qui possède comme solutions pour  $2 \leq j + k + l + m \leq 3$  les quadruplets

$$(0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 0)$$

alors que si le rapport  $\omega_1 : \omega_2$  est irrationnel, on ne trouve que

$$(1, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 0)$$

comme solution. Finalement, mentionnons que pour la forme normale de la deuxième équation (celle pour  $\dot{w}_2$ ), il faut plutôt résoudre l'équation

$$(-j + k) + 2(1 - l + m) = 0.$$

Maintenant que nous avons justifié pourquoi certains termes de la série de Taylor ne pouvaient pas être éliminés, il reste à effectuer le changement de coordonnées qui produira le système d'équations (5). L'ordinateur est ici d'un grand secours, les formules des coefficients de la forme normale devenant rapidement gigantesques. Avec Maple, il suffit d'entrer les systèmes d'équations (4) et (5) en omettant la dépendance de  $\alpha$  et de définir le changement de variable

$$\begin{aligned} W_1 &= z_1 + \sum_{2 \leq j+k+l+m \leq 3} \frac{\tilde{g}_{jklm}}{j!k!l!m!} z_1^j \bar{z}_1^k z_2^l \bar{z}_2^m \\ W_2 &= z_2 + \sum_{2 \leq j+k+l+m \leq 3} \frac{\tilde{h}_{jklm}}{j!k!l!m!} z_1^j \bar{z}_1^k z_2^l \bar{z}_2^m \end{aligned}$$

où  $\tilde{g}_{0110}$ ,  $\tilde{g}_{2100}$ ,  $\tilde{g}_{1011}$ ,  $\tilde{h}_{2000}$ ,  $\tilde{h}_{1110}$  et  $\tilde{h}_{0021}$  sont nuls. On remplace ensuite  $w_1$  et  $w_2$  par  $W_1$  et  $W_2$  dans (4) et on calcule les termes d'ordre inférieur à 4 du développement en série de Taylor de

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \dot{w}_1 - \underbrace{\left( \frac{\partial W_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}_1} \dot{\bar{z}}_1 + \frac{\partial W_1}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}_2} \dot{\bar{z}}_2 \right)}_{\dot{W}_1} \\ \Delta_2 &= \dot{w}_2 - \underbrace{\left( \frac{\partial W_2}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}_1} \dot{\bar{z}}_1 + \frac{\partial W_2}{\partial z_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}_2} \dot{\bar{z}}_2 \right)}_{\dot{W}_2} \end{aligned}$$

et on choisit les  $\tilde{g}$  et les  $\tilde{h}$  de façon à annuler les coefficients des termes de  $\Delta_1$  et de  $\Delta_2$ . Les coefficients  $G_{jklm}$  et  $H_{jklm}$  devront également être choisis de façon à annuler coefficients des termes  $z_1^j \bar{z}_1^k z_2^l \bar{z}_2^m$  de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .  $\square$

**Lemme 3 (Réduction à trois dimensions).** *Supposons que le changement de paramètres  $\mathcal{P}$  défini par*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mapsto (\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha), \omega_2(\alpha) - 2\omega_1(\alpha))$$

*possède un jacobien inversible en  $\alpha = \alpha_0$ . Alors en effectuant un changement de paramètres et un changement de coordonnées, le système d'équations (5') peut être transformé, en ignorant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4 et le plan invariant  $w_1 = 0$ , en le système (8), où  $\rho > 0$ ,  $u$  et  $v$  sont des variables réelles,  $\varphi$  est une variable angulaire,  $\Psi$  est une fonction périodique de période  $2\pi$  qui tend vers 0 près de l'origine.  $\mu = \mathcal{P}(\alpha) \in \mathbb{R}^3$  est le nouveau paramètre. Les divers coefficients sont donnés par les formules*

$$\begin{aligned} \gamma(\mu) &= \operatorname{Re} G_{0110}(\alpha) \\ \delta(\mu) &= \operatorname{Im} G_{0110}(\alpha) \\ \varepsilon_1(\mu) &= \operatorname{Re} G_{2100}(\alpha) \\ \varepsilon_2(\mu) &= \operatorname{Re} H_{2000}(\alpha) \\ \varepsilon_3(\mu) &= \operatorname{Im} H_{2000}(\alpha) \\ \Theta(\mu) &= \operatorname{Re} G_{1011}(\alpha) \\ \Gamma(\mu) &= \operatorname{Re} H_{1110}(\alpha) \\ \Delta(\mu) &= \operatorname{Im} H_{1110}(\alpha) - 2 \operatorname{Im} G_{2100}(\alpha) \\ \Upsilon(\mu) &= \operatorname{Re} H_{0021}(\alpha) \\ \Omega(\mu) &= \operatorname{Im} H_{0021}(\alpha) - 2 \operatorname{Im} G_{1011}(\alpha), \end{aligned}$$

où bien sûr  $\alpha = \mathcal{P}^{-1}(\mu)$ .

**Démonstration:**

On pose d'abord

$$\begin{aligned} w_1 &= \rho e^{i\varphi} \\ w_2 &= z e^{2i\varphi}, \end{aligned}$$

où  $\rho > 0 \in \mathbb{R}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Ainsi (5') devient, en omettant la dépendance de  $\alpha$ ,

$$\begin{cases} \dot{\rho} + i\rho\dot{\varphi} &= \lambda_1\rho + G_{0110}\rho z + G_{2100}\rho^3 + G_{1011}\rho |z|^2 \\ \dot{z} + 2iz\dot{\varphi} &= \lambda_2 z + H_{2000}r^2 + H_{1110}\rho^2 z + H_{0021}z |z|^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\mu_1 + \operatorname{Re} G_{0110} \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} g_{0110} \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} G_{2100}\rho^2 + \operatorname{Re} G_{1011} |z|^2) \\ \dot{\varphi} &= \omega_1 + \operatorname{Re} G_{0110} \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} G_{0110} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} G_{2100}\rho^2 + \operatorname{Im} G_{1011} |z|^2 \\ \dot{z} &= \lambda_2 z + H_{2000}\rho^2 + H_{1110}\rho^2 z + H_{0021}z |z|^2 - 2iz\dot{\varphi}. \end{cases}$$

Il suffit maintenant de poser  $z = u + iv$  et  $\mu = \mathcal{P}(\alpha)$  pour obtenir le système (8). La fonction  $\Psi$  est donnée par

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, u, v, \alpha) &= \operatorname{Im} G_{0110}(\alpha)u + \operatorname{Re} G_{0110}(\alpha)v + \operatorname{Im} G_{2100}(\alpha)\rho^2 \\ &\quad + \operatorname{Im} G_{1011}(\alpha)(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $(\rho, u, v)$  est près de l'origine,  $\Psi(\rho, u, v, \alpha)$  est près de 0.  $\square$

**Lemme 4 (Simplifications additionnelles).** *Supposons que  $\gamma^2(0) + \delta^2(0) \neq 0$ . Alors le système d'équations (8') peut être écrit sous la forme plus simple (9), où les nouveaux coefficients sont donnés par les formules*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\mu) &= \operatorname{Re} G_{2100}(\alpha) \\ \varepsilon_2(\mu) &= \operatorname{Re} (G_{0110}(\alpha)H_{2000}(\alpha)) \\ \varepsilon_3(\mu) &= \operatorname{Im} (G_{0110}(\alpha)H_{2000}(\alpha)) \\ \Theta(\mu) &= \frac{\operatorname{Re} G_{1011}(\alpha)}{|G_{0110}(\alpha)|} \\ \Gamma(\mu) &= \operatorname{Re} H_{1110}(\alpha) \\ \Delta(\mu) &= \operatorname{Im} H_{1110}(\alpha) - 2 \operatorname{Im} G_{2100}(\alpha) \\ \Upsilon(\mu) &= \frac{\operatorname{Re} H_{0021}(\alpha)}{|G_{0110}(\alpha)|} \\ \Omega(\mu) &= \frac{\operatorname{Im} H_{0021}(\alpha) - 2 \operatorname{Im} G_{1011}(\alpha)}{|G_{0110}(\alpha)|}. \end{aligned}$$

**Démonstration:**

Il suffit de poser le changement de variables

$$\begin{cases} x &= \gamma(\mu)u - \delta(\mu)v \\ y &= \delta(\mu)u + \gamma(\mu)v, \end{cases}$$

où  $x, y \in \mathbb{R}$ . □

## 6.2 Calculs pour l'interaction point limite/Hopf

**Lemme 5 (Étude de signe).** *Les coefficients*

$$\frac{-(\beta^2 + 5) + 4\sigma s \operatorname{sgn} \beta \sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{\beta^2} \quad (51)$$

et

$$\frac{4\sigma - 3s \operatorname{sgn} \beta \sqrt{2(\beta^2 + 1)}}{2\beta^2}, \quad (52)$$

où  $s = \pm 1$ ,  $\sigma = \pm 1$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , sont positifs lorsque  $\sigma = -1$ ,  $s = -\operatorname{sgn} \beta$  et  $|\beta| < \sqrt{11 + 8\sqrt{2}}$ .

**Démonstration:**

Afin que le numérateur du premier coefficient (51) puisse être positif, on doit absolument avoir

$$s = \sigma \operatorname{sgn} \beta.$$

L'inégalité

$$-(\beta^2 + 5) + 4\sqrt{2(\beta^2 + 1)} > 0, \quad (53)$$

que l'on transforme en

$$32(\beta^2 + 1) > (\beta^2 + 5)^2$$

puis en

$$\beta^4 - 22\beta^2 - 7 < 0,$$

est satisfaite pour  $\beta = 0$ . Puisque les racines de

$$(\beta^2)^2 - 22(\beta^2) - 7 = 0$$

sont données par  $\beta^2 = 11 \pm 8\sqrt{2}$  et que  $11 < 8\sqrt{2}$ , alors, par continuité, la condition  $\beta^2 < 11 + 8\sqrt{2}$  est nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (53) soit satisfaite. Finalement, afin que le deuxième coefficient (52) soit positif, c'est-à-dire afin que

$$4\sigma - 3\sigma\sqrt{2(\beta^2 + 1)} > 0,$$

on doit choisir  $\sigma = -1$  car  $4 < 3\sqrt{2}$  donc  $4 - 3\sqrt{2(\beta^2 + 1)}$  est toujours négatif.  $\square$

# Bibliography

- [1] N. Beautin. *Behavior of Dynamical Systems near the Boundaries of Stability Regions*. OGIZ GOSTEXIZDAT, Leningrad, Moscou, 1949. En russe.
- [2] Jacques Bélair and Sue Ann Campbell. Stability and bifurcations of equilibria in multiple-delayed differential equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 54:1402–1424, 1994.
- [3] H. Broer and G. Vegter. Subordinate šil’nikov bifurcations near some singularities of vector fields having low codimension. *Ergod. Theory and Dyn. Sys.*, 4:509–525, 1984.
- [4] Sue Ann Campbell and Victor Leblanc. Resonant Hopf-Hopf interactions in delay differential equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, pages 327–346, 1998.
- [5] J. Carr, S.-N. Chow, and Jack Hale. Abelian integrals and bifurcation theory. *J. Diff. Eqs*, 59:413–436, 1985.
- [6] S.-N. Chow, C. Li, and D. Wang. Uniqueness of periodic orbits of some vector fields with codimension two singularities. *J. Diff. Eqs*, 77:231–253, 1989.
- [7] S.-N. Chow, C. Li, and D. Wang. *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press, 1994.
- [8] Étienne Dupuis. Bifurcations de Hopf-Hopf sans résonance. Projet de cours, Décembre 1998.

- [9] J. E. Furter. Hopf bifurcation at non-semisimple eigenvalues: a singularity theory approach. In *International Series of Numerical Mathematics*, volume 104, pages 135–145. Birkhäuser Verlag Basel, 1992.
- [10] D. Gaspard. Local birth of homoclinic chaos. *Physica D*, 62:94–122, 1993.
- [11] N. Gavrilov. On some bifurcations of an equilibrium with one zero and a pair or pure imaginary roots. *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations*, 1978. En russe.
- [12] N. Gavrilov. On some bifurcations of an equilibrium with two pairs of pure imaginary roots. *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations*, pages 17–30, 1980. En russe.
- [13] Martin Golubitsky and William F. Langford. Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations. *J. Diff. Eqns*, 41:375–415, 1981.
- [14] J. Guckenheimer. On a codimension two bifurcation. In D. Rand and L. Young, editors, *Dynamical Systems and Turbulence*, volume 898. Springer-Verlag, 1981.
- [15] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, chapter 7. Springer-Verlag, 1983 (Third printing 1990).
- [16] Y. Q. He. Normal form analysis of strongly resonant Hopf bifurcation. Master's thesis, University of Waterloo, Canada, 1992.
- [17] P. J. Holmes. Unfolding a degenerate nonlinear oscillator: a codimension two bifurcation. In R.H.G. Helleman, editor, *Nonlinear Dynamics*, pages 473–488. New York Academy of Sciences, 1980.
- [18] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems. *Ber. Math. Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss Leipzig*, 94:3–22, 1942.

- [19] J. P. Keener. Infinite period bifurcation and global bifurcation branches. *SIAM J. Appl. Math.*, 41:127–144, 1981.
- [20] E. Knobloch and M. R. E. Proctor. The double Hopf bifurcation with 2 : 1 resonance. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 415:61–90, 1988.
- [21] M. Krupa. On 1 : 1 resonant Hopf bifurcation. Master’s thesis, University of Waterloo, Canada, 1986.
- [22] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, chapter 3, 5 and 8. Springer-Verlag, 1995.
- [23] William F. Langford. Periodic and steady mode interactions lead to tori. *SIAM J. Appl. Math.*, 37:22–48, 1979.
- [24] Mélanie Langlois. Étude de bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1 : 2 pour un système de deux neurones couplés avec délais. Master’s thesis, Université d’Ottawa, Canada, 2000.
- [25] Victor LeBlanc. On some secondary bifurcations near resonant Hopf-Hopf interactions. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2000. To appear (accepted).
- [26] Victor G. LeBlanc and William F. Langford. Classification and unfoldings of 1 : 2 resonant Hopf bifurcation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 136:305–357, 1996.
- [27] S. B. Margolis and B. J. Matkowsky. Flame propagation in channels: secondary bifurcation to quasi-periodic pulsations. *SIAM J. Appl. Math.*, 45:93–129, 1985.
- [28] J. Marsden and M. McCracken. *Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer-Verlag, 1976.
- [29] Murray R. Spiegel. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, pages 32–33. McGraw-Hill, 1968.
- [30] F. Takens. Singularities of vector fields. *Publ. Math. IHES*, 14:47–100, 1974.



- [31] S. van Gils. A note on 'Abelian integrals and bifurcation theory'. *J. Diff. Eqs*, 59:437–441, 1985.
- [32] S. A. van Gils, M. Krupa, and William F. Langford. Hopf bifurcation with non-semisimple 1 : 1 resonance. *Nonlinearity*, 3:825–850, 1990.
- [33] H. Żoladek. Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes. *J. Diff. Eqs*, 67:1–55, 1987.

[8] est un résumé détaillé (approprié pour un premier cours en systèmes dynamiques) de la bifurcation de Hopf-Hopf sans résonance et peut être téléchargé du site <http://www.multimania.com/lestourtereaux/maths/>. Les diagrammes de phase et les courbes de points fixes ont été générés à l'aide du gratuiciel *DynaSys 0.21*<sup>1</sup>, disponible à <http://dynasys.multimania.com/>. La plupart des calculs ont été effectués à l'aide de *Maple V Release 5*, version étudiante, de l'Université de Waterloo.

---

<sup>1</sup>La version 0.30 est maintenant disponible (juillet 2000).