Bifurcations de Hopf-Hopf sans résonance

Étienne Dupuis
Université d'Ottawa

Décembre 1998*

Résumé

Nous considérons un système d'équations différentielles $\dot{x} = f(x, \alpha)$, où $x \in \mathbb{R}^n, n \geq 4$ est une fonction du temps et où $\alpha \in \mathbb{R}^2$ est un paramètre. Nous supposons que ce système est tel qu'à $\alpha = \alpha_0$, f possède un point d'équilibre non-hyperbolique x_0 et que le jacobien de f évalué en (x_0, α_0) possède exactement deux paires de valeurs propres conjuguées strictement imaginaires. Ces conditions caractérisent la bifurcation de Hopf-Hopf. Certaines conditions de non-résonance devront être imposées sur les valeurs propres en (x_0, α_0) afin de simplifier l'étude de la bifurcation.

Nous faisons d'abord une étude détaillée d'un système d'amplitudes dans le plan. Nous démontrons ensuite, en plusieurs étapes, qu'un système d'équations en coordonnées complexes satisfaisant certaines conditions de non-dégénérescence et de différentiabilité peut être transformé en coordonnées polaires en un système dont la forme tronquée est exactement le système étudié en début d'article. Finalement, nous concluons avec le cas général, en coordonnées cartésiennes.

1 Un système d'amplitudes

Considérons le système d'équations $\dot{\xi} = F(\xi, \mu)$ défini par

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_1(\mu_1 - \xi_1 - \theta\xi_2) \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_2(\mu_2 - \xi_2 - \delta\xi_1), \end{cases} \tag{1}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ et où $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ est un paramètre. $\theta = \theta(\mu)$ et $\delta = \delta(\mu)$ dépendent de μ de façon différentiable, sont non nuls et tels que $\theta\delta \neq 1$ pour $\|\mu\|$ suffisamment petit.

*Corrections mineures en mars 1999

1.1 Points d'équilibre

Le système (1) possède au moins un point d'équilibre, soit $\xi_0 = (0, 0)$. Le jacobien de F à l'origine est donné par

$$D_\xi F(0, \mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc μ_1 et μ_2. Ainsi, la stabilité du point d'équilibre à l'origine est entièrement déterminée par les signes de μ_1 et μ_2. Il y aura donc bifurcation lors de la traversée des axes $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$.

Lorsque μ_1 est positif, on a un deuxième point d'équilibre $\xi_A = (\mu_1, 0)$. Le jacobien de F à ce point est

$$D_\xi F(\xi_A, \mu) = \begin{pmatrix} -\mu_1 & -\theta\mu_1 \\ 0 & \mu_2 - \delta\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Les deux valeurs propres sont donc $-\mu_1$ et $\mu_2 - \delta\mu_1$. Ainsi, une des valeurs propres est toujours négative. La deuxième change de signe lorsque $\mu_2 = \delta\mu_1$. Il y a donc bifurcation sur la demi-droite $A = \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_2 = \delta\mu_1,\ \mu_1 > 0\}$.

De façon similaire, $\xi_B = (0, \mu_2)$ est un point d'équilibre du système (1) lorsque $\mu_2 > 0$. La valeur propre $-\mu_2$ est toujours négative tandis que la valeur propre $\mu_1 - \theta\mu_2$ change de signe lorsque le paramètre μ traverse la demi-droite $B = \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = \theta\mu_2,\ \mu_2 > 0\}$.

La résolution du système linéaire

$$\begin{cases} \mu_1 - \xi_1 - \theta\xi_2 = 0 \\ \mu_2 - \xi_2 - \delta\xi_1 = 0 \end{cases}$$

nous permet de trouver un autre point d'équilibre, soit

$$\xi_C = \left(\frac{\theta\mu_2 - \mu_1}{\delta\theta - 1}, \frac{\delta\mu_1 - \mu_2}{\delta\theta - 1} \right).$$

Ce point d'équilibre sera situé dans le premier quadrant si et seulement si $\theta\mu_2 - \mu_1$, $\delta\mu_1 - \mu_2$ et $\delta\theta - 1$ sont de même signe. Le jacobien de F au point ξ_C est donné par

$$D_\xi F(\xi_C, \mu) = \frac{1}{\delta\theta - 1} \begin{pmatrix} \mu_1 - \theta\mu_2 & \theta(\mu_1 - \theta\mu_2) \\ \delta(\mu_2 - \delta\mu_1) & \mu_2 - \delta\mu_1 \end{pmatrix},$$

dont la trace est

$$\frac{(\mu_1 - \theta\mu_2) + (\mu_2 - \delta\mu_1)}{\delta\theta - 1} < 0$$

et le déterminant est

$$-\frac{(\mu_1 - \theta\mu_2)(\mu_2 - \delta\mu_1)}{\delta\theta - 1} \neq 0.$$

Puisque les expressions $\theta\mu_2 - \mu_1$, $\delta\mu_1 - \mu_2$ et $\delta\theta - 1$ sont de même signe, alors la trace est toujours strictement négative. Pour la même raison, le signe du déterminant sera l'opposé du signe de $\delta\theta - 1$. Si le déterminant est négatif, alors les valeurs propres, qui satisfont à l'équation $\lambda^2 - \mathrm{tr}(D_\xi F)\lambda + \det(D_\xi F) = 0$, doivent être réelles et de signes opposés. Le point d'équilibre ξ_C est dans ce cas un col (hyperbolique). Si le déterminant est positif, alors la partie réelle des deux valeurs propres sera négative, quel que soit le signe du discriminant $(\mathrm{tr}(D_\xi F))^2 - 4\det(D_\xi F)$.

Ceci complète l'étude des points d'équilibres hyperboliques.

1.2 Orbites périodiques

Considérons la fonction $g(\xi, \mu) = \frac{1}{\xi_1 \xi_2}$ définie pour ξ dans le premier quadrant. Alors le produit des fonctions g et F est donné par

$$(gF)(\xi, \mu) = \left(\frac{\mu_1 - \xi_1 - \theta\xi_2}{\xi_2}, \frac{\mu_2 - \xi_2 - \delta\xi_1}{\xi_1} \right)$$

d'où

$$\nabla(gF)(\xi, \mu) = \frac{-1}{\xi_2} + \frac{-1}{\xi_1} \neq 0.$$

Ainsi, d'après le critère de Dulac, il n'y a pas d'orbites périodiques dans le premier quadrant.

En effet, s'il y avait une orbite périodique Γ entièrement contenue dans le premier quadrant, on aurait

$$\int\int_\Omega \nabla(gF) d\Omega < 0,$$

où Ω est la région délimitée par la courbe Γ, puisque $\nabla(gF)$ est strictement négatif. Or, la courbe Γ est tangente au champ de vecteurs F en tout point, ce qui implique que $F \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{n}$ représente la normale (extérieure) à l'orbite périodique. Ainsi,

$$\int_\Gamma g(\vec{n} \cdot F) d\Gamma = 0.$$

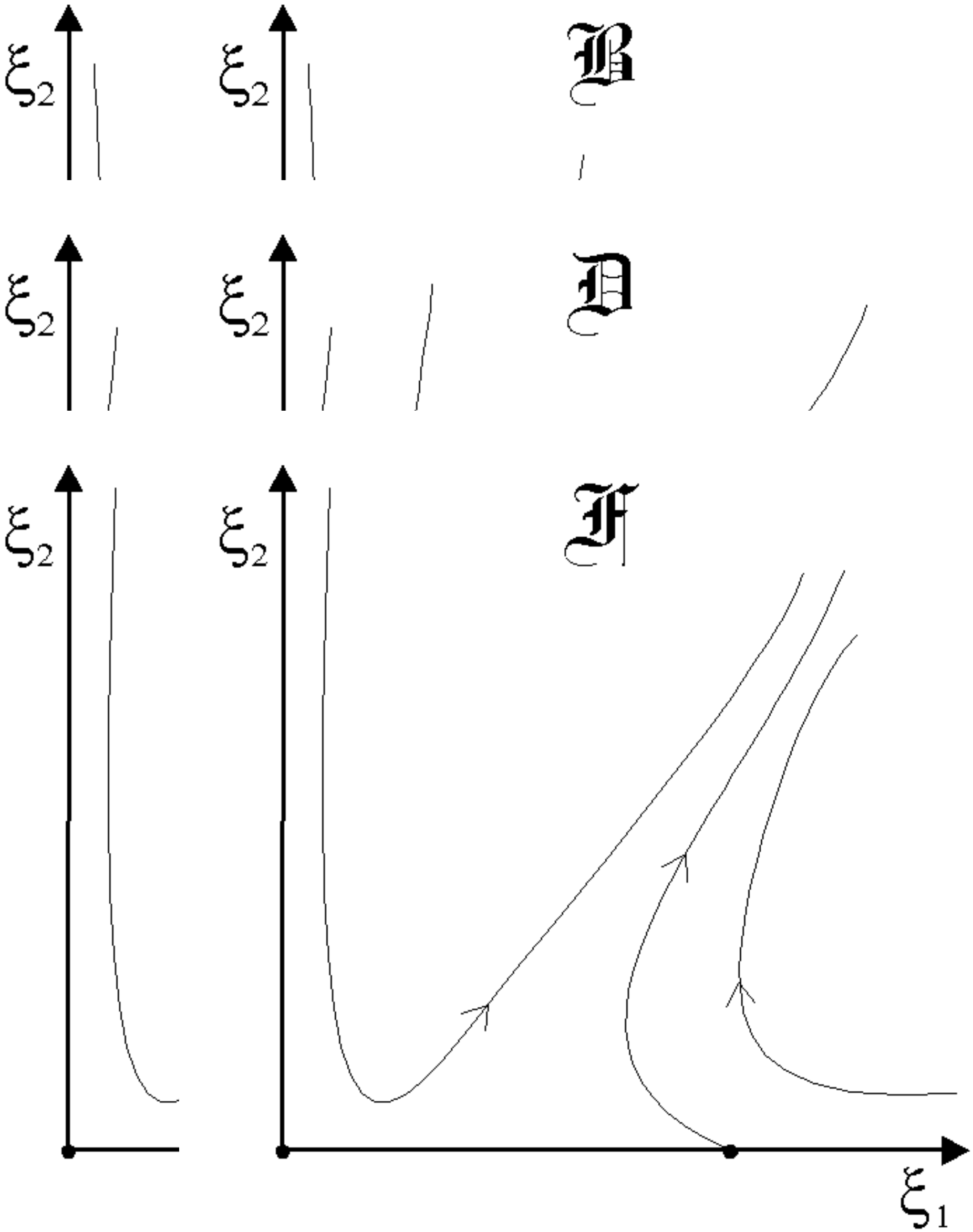
Cependant, le théorème de la divergence (qui est une forme du théorème de Green) affirme que

$$0 = \int_{\Gamma = \partial\Omega} \vec{n} \cdot (gF) d\Gamma = \int\int_\Omega \nabla(gF) d\Omega < 0,$$

ce qui est une contradiction.

1.3 Diagrammes de phase

Notre étude des points d'équilibre et des orbites périodiques du système dynamique (1) nous permet de conclure qu'il y a 15 différents diagrammes de phase génériques pour ce système. Les voici :

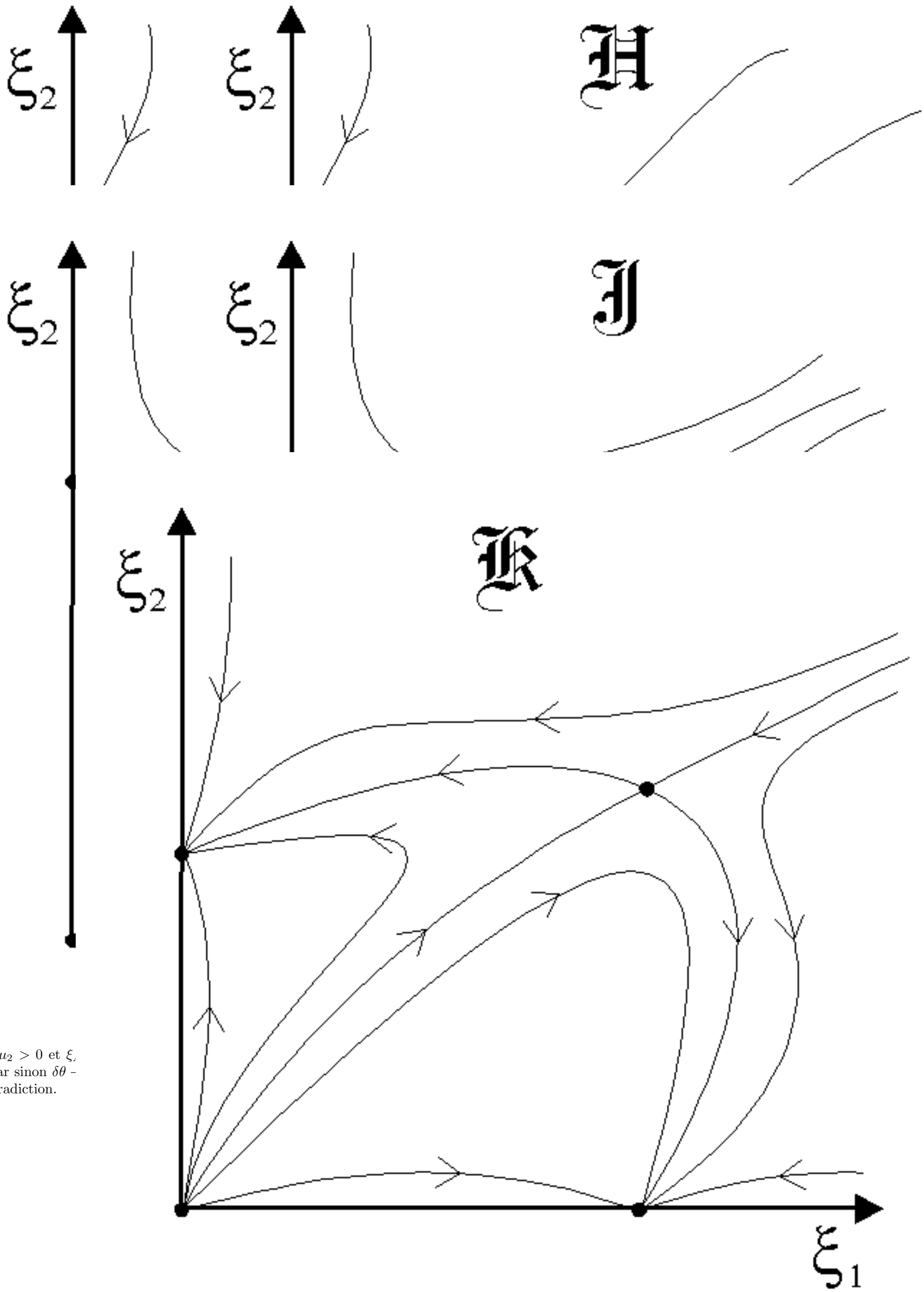


– $\mu_1 <$
être
que

– $\mu_1 >$

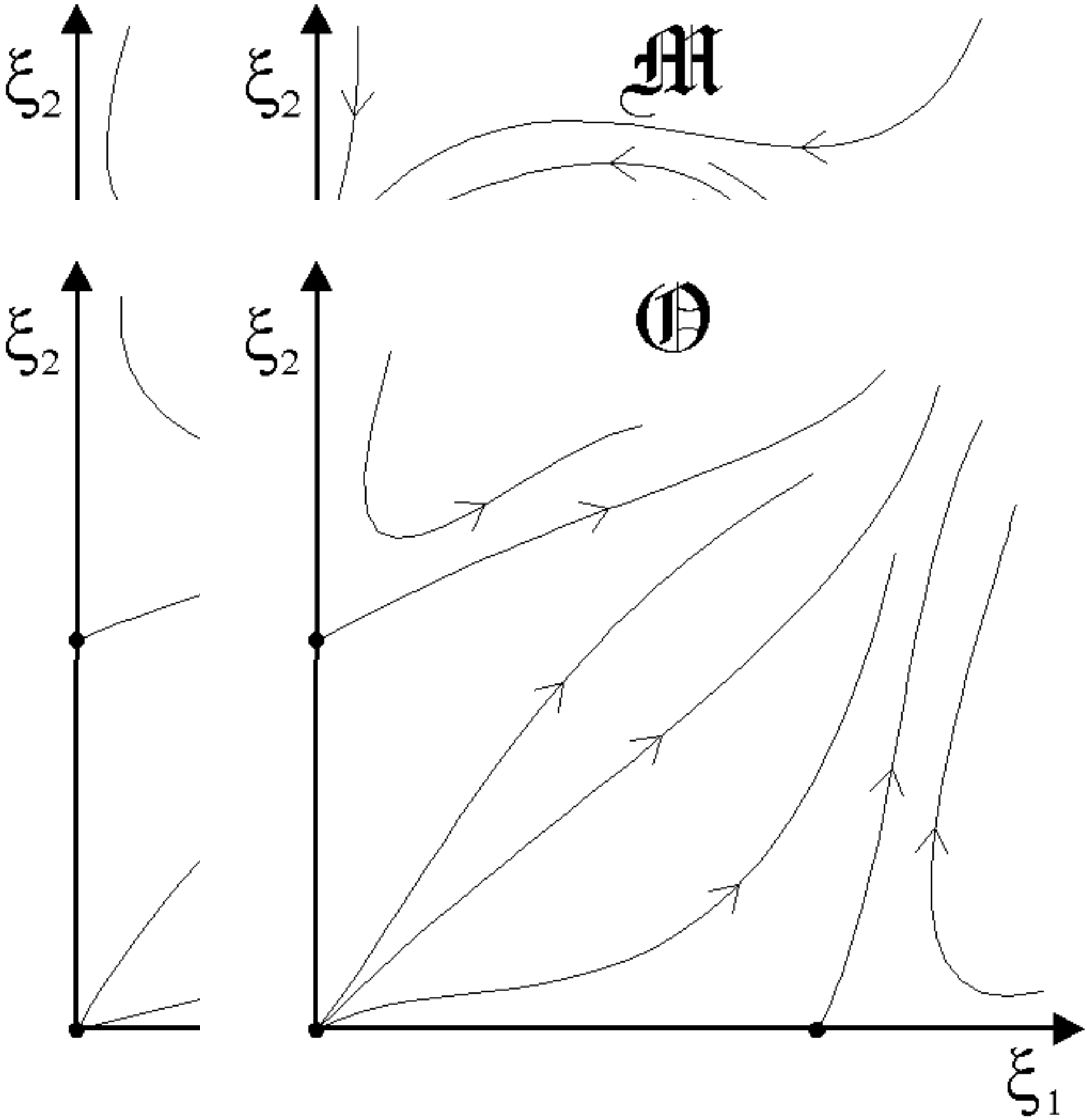
– $\mu_1 >$

– $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$ et $\mu_1 - \theta\mu_2 < 0$.



– $\mu_1 <$

– $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ et ξ_A n'ayant pas la même stabilité que ξ_B.



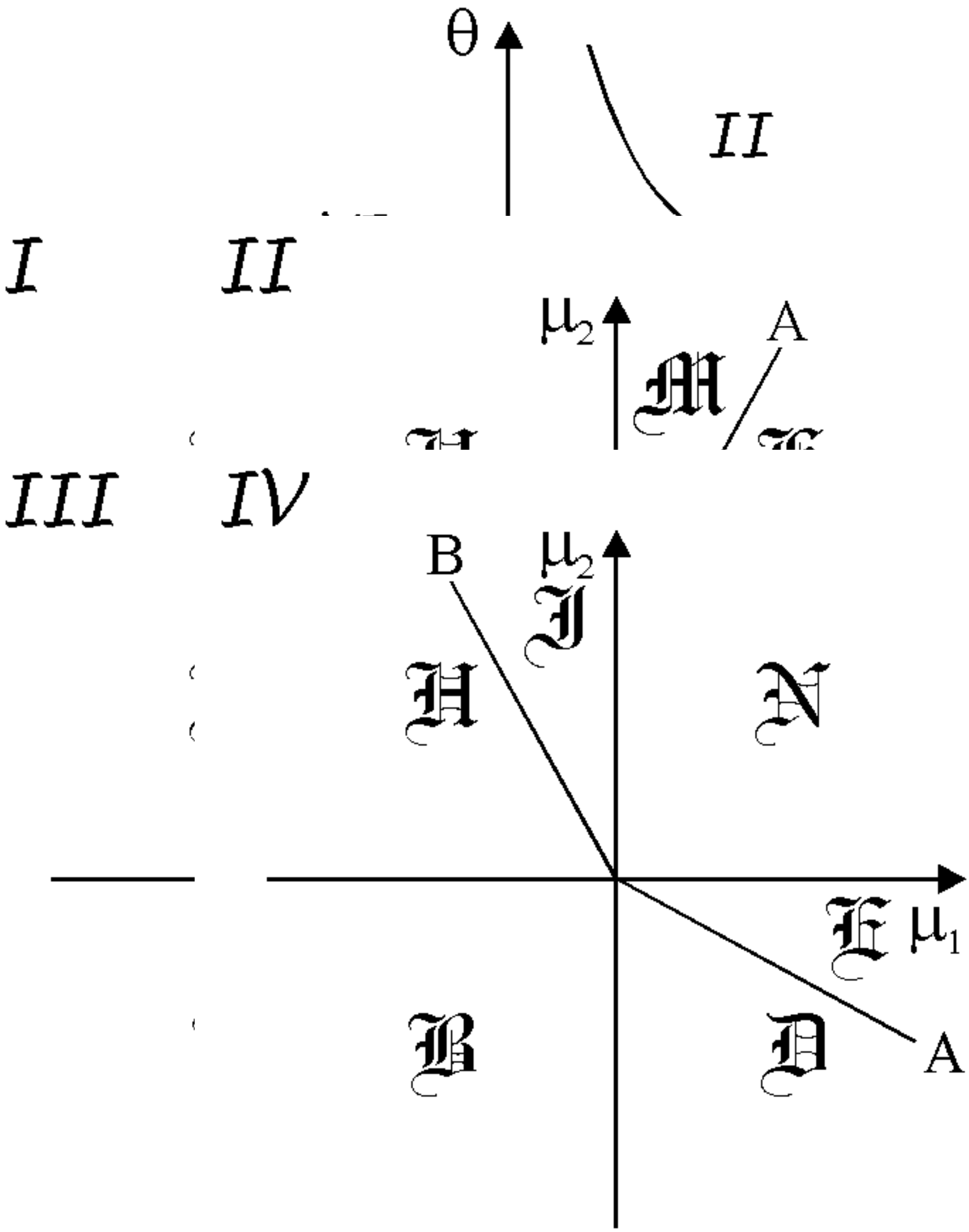
– μ_1 :

1.4 Diagrammes de bifurcation

Nous pouvons maintenant donner les divers diagrammes de phase du système (1). Ces diagrammes dépendront des valeurs de $\delta(0)$ et de $\theta(0)$ de la façon suivante :

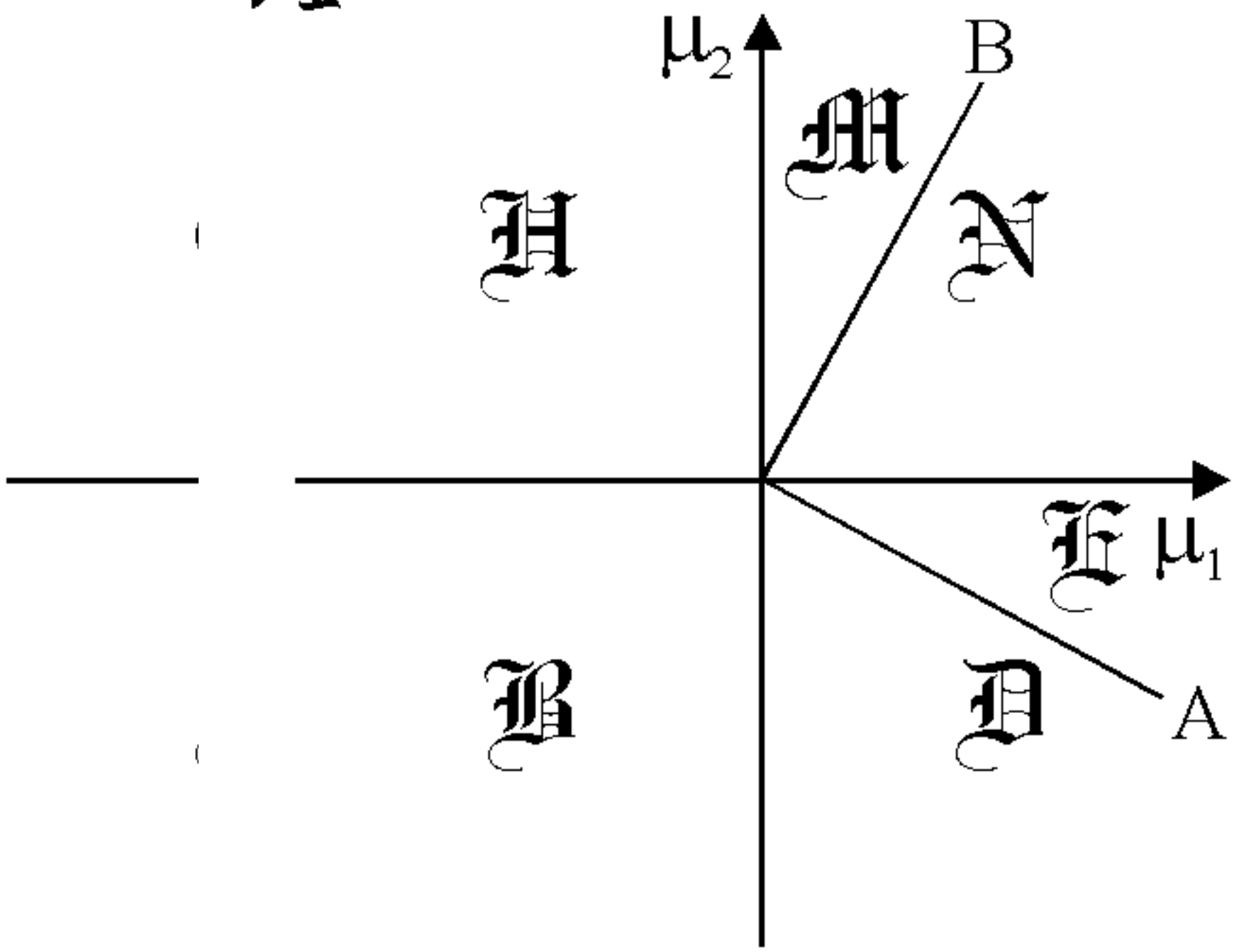
– La demi-droite A sera située dans le premier ou le deuxième quadrant selon le signe de δ.
– La demi-droite B sera située dans le premier ou le quatrième quadrant selon le signe de θ.
– La présence et la stabilité du point d'équilibre ξ_C dépendent grandement du signe de $\delta\theta - 1$.
– Finalement, si δ et θ sont positifs, le signe de $\delta\theta - 1$ influencera la position relative des demi-droites A et B, dont les pentes sont respectivement δ et $1/\theta$.

Ces observations nous permettent de séparer le plan (δ, θ) en six régions distinctes :



À ch

[1]En fait, seul le diagramme de bifurcation de la région V est nettement différent des autres.



Notez que puisque $\theta(\mu)$ et $\delta(\mu)$ sont différentiables, $\theta(\mu)$ et $\delta(\mu)$ ne changent pas de région lorsque μ est suffisamment près de l'origine.

1.5 Diagrammes de phases à l'origine

Voir Takens [6].

1.6 Généralisation

Le lemme suivant nous permet de généraliser les résultats obtenus dans cette section :

Lemme 1.1. *Le système $\dot{x} = \tilde{F}(x, \alpha)$ donné par*

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_1(\mu_1 - \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2) \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_2(\mu_2 - \xi_2 - \delta\xi_1 + \Delta\xi_1^2), \end{cases} \tag{2}$$

où ξ, θ et δ satisfont aux conditions énoncées pour le système (1) *et où $\Theta = \Theta(\mu)$ et $\Delta = \Delta(\mu)$ sont différentiables, est localement topologiquement équivalent par fibres au système* (1)*.*

Démonstration:

Afin de démontrer l'équivalence topologique, nous devrions construire un homéomorphisme des solutions de (2) vers les solutions de (1). Cependant, nous ne démontrons que l'essentiel, c'est-à-dire que les diagrammes de bifurcations de (2) sont plus ou moins les mêmes que ceux de (1).

Comme précédemment, il y a un point d'équilibre ξ_0 à l'origine, dont la stabilité est donnée par les signes de μ_1 et μ_2. Le point $\xi_A = (\mu_1, 0)$ est également un point d'équilibre si $\mu_1 > 0$. Le jacobien de $\tilde{F}$ à ce point est

$$D_\xi \tilde{F}(\xi_A, \mu) = \begin{pmatrix} -\mu_1 & -\theta\mu_1 \\ 0 & \mu_2 - \delta\mu_1 + \Delta\mu_1^2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres étant $-\mu_1$ et $\mu_2 - \delta\mu_1 + \Delta\mu_1^2$, la stabilité du point d'équilibre change sur la courbe $\tilde{A} = \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_2 = \delta\mu_1 - \Delta\mu_1^2,\ \mu_1 > 0\}$. De façon similaire, $\xi_B = (0, \mu_2)$ est un point d'équilibre de (2) lorsque $\mu_2 > 0$. Le jacobien $D_\xi \tilde{F}(\xi_B, \mu)$ possède les valeurs propres $-\mu_2$ et $\mu_1 - \theta\mu_2 + \Theta\mu_2^2$. La première est toujours négative tandis que la deuxième change de signe sur la courbe $\tilde{B} = \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = \theta\mu_2 - \Theta\mu_2^2,\ \mu_2 > 0\}$.

Considérons maintenant l'application $X : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$X(\xi, \mu) = \left(\mu_1 - \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2, \mu_2 - \xi_2 - \delta\xi_1 + \Delta\xi_1^2\right).$$

Les ξ tels que $X(\xi, \mu) = 0$ sont des points d'équilibres de (2). On calcule aisément que $X(0,0) = 0$ et que $\det D_\xi X(0,0) = 1 - \delta\theta$, non nul par hypothèse. Ainsi, d'après le théorème de la fonction implicite, il existe pour $\|\mu\|$ suffisamment petit une fonction unique $\xi_{\tilde{C}}(\mu)$ telle que $\xi_{\tilde{C}}(0) = 0$ et telle que $X(\xi_{\tilde{C}}(\mu), \mu) = 0$. Écrivons chacune des deux composantes de $\xi_{\tilde{C}}(\mu)$ sous forme de série de Taylor :

$$\begin{aligned} \xi_{\tilde{C}_1} &= \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\mu_1^i\mu_2^j \\ \xi_{\tilde{C}_2} &= \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij}\mu_1^i\mu_2^j. \end{aligned}$$

Puisque $\xi_{\tilde{C}}(0) = 0$, alors on doit avoir $a_{00} = b_{00} = 0$. L'équation $X(\xi_{\tilde{C}}(\mu), \mu) = 0$ devient le système de deux équations suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1 - \left(\sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij}\mu_1^i\mu_2^j\right) - \theta\left(\sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij}\mu_1^i\mu_2^j\right) + \Theta\left(\sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij}\mu_1^i\mu_2^j\right)^2 \\ 0 &= \mu_2 - \left(\sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij}\mu_1^i\mu_2^j\right) - \delta\left(\sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij}\mu_1^i\mu_2^j\right) + \Delta\left(\sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij}\mu_1^i\mu_2^j\right)^2, \end{aligned}$$

qu'on écrit sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1(1 - a_{10} - \theta b_{10}) + \mu_2(-a_{01} - \theta b_{10}) + \mathcal{O}(\|\mu\|^2) \\ 0 &= \mu_2(1 - b_{10} - \delta a_{10}) + \mu_1(-b_{01} - \delta a_{10}) + \mathcal{O}(\|\mu\|^2) \end{aligned}$$

Comme ces équations doivent être vérifiées $\forall\mu$ près de l'origine, il faut en annuler tous les coefficients. Pour ce faire, il suffit de résoudre

$$\begin{cases} 1 &= a_{10} + \theta b_{10} \\ 0 &= -b_{10} - \delta a_{10} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 1 &= b_{10} + \delta a_{10} \\ 0 &= -a_{10} - \theta b_{10}. \end{cases}$$

On obtient

$$a_{10} = \frac{-1}{\delta\theta - 1}, \quad a_{01} = \frac{\theta}{\delta\theta - 1}, \quad b_{10} = \frac{\delta}{\delta\theta - 1}, \quad b_{01} = \frac{-1}{\delta\theta - 1}.$$

Ainsi, le point d'équilibre $\xi_{\tilde{C}}$ est situé à

$$\xi_{\tilde{C}} = \left(\frac{\theta\mu_2 - \mu_1}{\delta\theta - 1} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2), \frac{\delta\mu_1 - \mu_2}{\delta\theta - 1} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2) \right).$$

Lorsque $\|\mu\|$ est suffisamment petit, ce point d'équilibre est situé dans le premier quadrant si (et seulement si) $\theta\mu_2 - \mu_1$, $\delta\mu_1 - \mu_2$ et $\delta\theta - 1$ sont de même signe. Le jacobien de $\tilde{F}$ au point $\xi_{\tilde{C}}$ est donné par

$$D_\xi \tilde{F}(\xi_{\tilde{C}}, \mu) = \frac{1}{\delta\theta - 1} \begin{pmatrix} \mu_1 - \theta\mu_2 & \theta(\mu_1 - \theta\mu_2) \\ \delta(\mu_2 - \delta\mu_1) & \mu_2 - \delta\mu_1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2),$$

dont la trace est

$$\frac{(\mu_1 - \theta\mu_2) + (\mu_2 - \delta\mu_1)}{\delta\theta - 1} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2)$$

et le déterminant est

$$-\frac{(\mu_1 - \theta\mu_2)(\mu_2 - \delta\mu_1)}{\delta\theta - 1} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2).$$

Comme précédemment, la trace est toujours négative et le signe du déterminant est l'opposé du signe de $\delta\theta - 1$.

Le système (2) possède donc les mêmes points d'équilibre que le système (1). Ces points d'équilibre sont soumis à des bifurcations sur des courbes similaires aux courbes de bifurcations du système (1). De plus, on peut montrer aisément, en utilisant la même technique que précédemment, que le système (2) ne possède pas de cycles invariants. Dans ce cas, les diagrammes de bifurcations du système (2) "ressemblent" suffisamment à ceux du système (1) pour qu'il y ait équivalence topologique. □

2 Un autre système d'amplitudes

Nous allons maintenant étudier un système d'amplitudes très similaire au système (2). La dynamique de ce système sera cependant un peu plus complexe. Soit le système d'équations $\dot{\xi} = F(\xi, \mu)$ défini par

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_1(\mu_1 + \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2) \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_2(\mu_2 - \xi_2 + \delta\xi_1 + \Delta\xi_1^2), \end{cases} \tag{3}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ et où $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ est un paramètre. $\theta = \theta(\mu)$, $\delta = \delta(\mu)$, $\Theta = \Theta(\mu)$ et $\Delta = \Delta(\mu)$ dépendent de μ de façon différentiable et sont tels que $\delta, \theta \neq 0$, $\delta, \theta \neq 1$, et $\theta\delta \neq 1$ pour $\|\mu\|$ suffisamment petit. Si $\delta\theta > 1$, nous imposerons également la condition $\theta(\theta - 1)\Delta + \delta(\delta - 1)\Theta \neq 0$.

2.1 Points d'équilibres

On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (0,0) \\ \xi_A &= (-\mu_1, 0), \quad \mu_1 < 0 \\ \xi_B &= (0, \mu_2), \quad \mu_2 > 0 \end{aligned}$$

sont des points d'équilibres de (3). Les jacobiens de F évalués en ces points sont

$$\begin{aligned} D_\xi F(\xi_0, \mu) &= \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \\ D_\xi F(\xi_A, \mu) &= \begin{pmatrix} -\mu_1 & \theta\mu_1 \\ 0 & \mu_2 - \delta\mu_1 + \Delta\mu_1^2 \end{pmatrix} \\ D_\xi F(\xi_B, \mu) &= \begin{pmatrix} \mu_1 - \theta\mu_2 + \Theta\mu_2^2 & 0 \\ \delta\mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, il y a bifurcation sur les axes $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$ et bifurcation sur les courbes

$$\begin{aligned} A &= \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_2 = \delta\mu_1 - \Delta\mu_1^2,\ \mu_1 < 0\} \\ B &= \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 = \theta\mu_2 - \Theta\mu_2^2,\ \mu_2 > 0\}. \end{aligned}$$

Un quatrième point d'équilibre, ξ_C, est créé (ou détruit) par une bifurcation transcritique au point ξ_A ou ξ_B. En utilisant la même technique que dans la démonstration du lemme 1.1, on trouve

$$\xi_C = \left(-\frac{\theta\mu_2 - \mu_1}{\delta\theta - 1} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2), \frac{\delta\mu_1 - \mu_2}{\delta\theta - 1} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2) \right).$$

Le jacobien de F à ce point est donné par

$$D_\xi F(\xi_C, \mu) = \frac{1}{\delta\theta - 1} \begin{pmatrix} \mu_1 - \theta\mu_2 & -\theta(\mu_1 - \theta\mu_2) \\ -\delta(\mu_2 - \delta\mu_1) & \mu_2 - \delta\mu_1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2),$$

dont la trace est

$$\frac{(\mu_1 - \theta\mu_2) + (\mu_2 - \delta\mu_1)}{\delta\theta - 1} + \mathcal{O}(\|\mu\|^2)$$

et le déterminant est

$$-\frac{(\mu_1 - \theta\mu_2)(\mu_2 - \delta\mu_1)}{\delta\theta - 1} + \mathcal{O}(\|\mu\|^3).$$

Cette fois, le déterminant est de même signe que $\delta\theta - 1$ car les expressions $\mu_1 - \theta\mu_2$ et $\mu_2 - \delta\mu_1$ au numérateur sont de signe contraire. Alors que dans le système (2) la trace de $D_\xi \tilde{F}(\xi_{\tilde{C}}, \mu)$ était toujours négative, elle peut maintenant devenir positive. En effet, elle vaut zéro sur la courbe

$$C = \{(\mu_1, \mu_2) \mid \mu_2 = -\mu_1 \left(\frac{\delta - 1}{\theta - 1} \right) + \mathcal{O}(\|\mu\|^2)\}.$$

Cette courbe est tangente à un des axes $\mu_i = 0$ si $\delta = 1$ ou si $\theta = 1$. Afin de faciliter l'analyse qui suit, nous supposons que ce n'est pas le cas. Lorsque la trace est nulle et que le déterminant est positif, il y a bifurcation de Hopf. Ainsi, si $\delta\theta > 1$, un cycle apparaîtra autour du point d'équilibre ξ_C lorsque le paramètre μ traversera la courbe C.

2.2 Orbites périodiques

Vérifions d'abord si la bifurcation de Hopf est dégénérée, ce qui sera le cas si le premier coefficient de Lyapunov est nul.

Lemme 2.1. *Le signe du premier coefficient de Lyapunov au point d'équilibre ξ_C est donné, pour $\|\mu\|$ suffisamment petit, par*

$$\operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{\delta}[\theta(\theta-1)\Delta + \delta(\delta-1)\Theta]\right). \tag{4}$$

Avant de passer à la démonstration, notons que cette expression est légèrement différente de celle donnée par Kuznetsov [5] :

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\delta-1}{\theta-1}[\theta(\theta-1)\Delta + \delta(\delta-1)\Theta]\right).$$

Les deux formules sont contradictoires lorsque les deux constantes δ et θ sont supérieures à 1. Le lecteur est donc avisé de suivre avec attention la démonstration afin de déceler l'erreur que je n'ai pu identifier.

Démonstration:

Effectuons d'abord une translation du point d'équilibre ξ_C pour le placer à l'origine :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1 - \xi_{C_1} \\ \eta_2 &= \xi_2 - \xi_{C_2}. \end{aligned}$$

À partir du système (3), on calcule

$$\begin{aligned} \dot\eta_1 &= \xi_1\left(\mu_1 + \xi_1 - \theta\xi_2 + \Theta\xi_2^2\right) \\ &= (\eta_1 + \xi_{C_1})\left[\mu_1 + (\eta_1 + \xi_{C_1}) - \theta(\eta_2 + \xi_{C_2}) + \Theta(\eta_2 + \xi_{C_2})^2\right] \\ &= (\eta_1 + \xi_{C_1})\underbrace{\left[\mu_1 + \xi_{C_1} - \theta\xi_{C_2} + \Theta\xi_{C_2}^2\right]}_{0} \\ &\quad + (\eta_1 + \xi_{C_1})\left[\eta_1 + (2\xi_{C_2}\Theta - \theta)\eta_2 + \Theta\eta_2^2\right] \\ &= \xi_{C_1}\eta_1 + (2\Theta\xi_{C_1}\xi_{C_2} - \theta\xi_{C_1})\eta_2 \\ &\quad + \eta_1^2 + (2\xi_{C_2}\Theta - \theta)\eta_1\eta_2 + \Theta\xi_{C_1}\eta_2^2 + \Theta\eta_1\eta_2^2 \\ \dot\eta_2 &= (2\Delta\xi_{C_2}\xi_{C_1} + \delta\xi_{C_2})\eta_1 - \xi_{C_2}\eta_2 \\ &\quad + \Delta\xi_{C_2}\eta_1^2 + (2\xi_{C_1}\Delta + \delta)\eta_1\eta_2 - \eta_2^2 + \Delta\eta_1^2\eta_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Le jacobien de ce nouveau système, disons $\hat{F}$, au point d'équilibre $\eta = 0$ est donné par

$$D_\eta \hat{F}(0,\mu) = \begin{pmatrix} \xi_{C_1} & 2\Theta\xi_{C_1}\xi_{C_2} - \theta\xi_{C_1} \\ 2\Delta\xi_{C_2}\xi_{C_1} + \delta\xi_{C_2} & -\xi_{C_2} \end{pmatrix}.$$

Sur la courbe C, la trace est nulle : $\xi_{C_1} - \xi_{C_2} = 0$. En d'autres mots, le point d'équilibre ξ_C du système (3) subit une bifurcation de Hopf lorsqu'il traverse la droite $\xi_1 = \xi_2$. Afin d'alléger la notation pour les calculs qui vont suivre, posons

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \xi_{C_1} \\ \beta &= 2\Theta\varepsilon^2 - \theta\varepsilon \\ \gamma &= 2\Delta\varepsilon^2 + \delta\varepsilon \\ \Lambda &= \sqrt{-\varepsilon^2 - \gamma\beta}. \end{aligned}$$

Ainsi, le jacobien de $\hat{F}$ à l'origine devient, sur la courbe critique C,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \beta \\ \gamma & -\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Remarquez que puisque ξ_C est situé dans le premier quadrant, on a $\varepsilon > 0$, ce qui implique, puisque le déterminant de (6) est positif, que β, γ et Λ sont également non nuls.

Il faut maintenant effectuer un changement de base de façon à transformer (6) en sa forme canonique réelle de Jordan. Puisque les valeurs propres de (6) sont $\pm i\Lambda$, on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon & \beta \\ \gamma & -\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Pour ce faire, fixons $d = -1$ et utilisons la méthode d'élimination de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon & \gamma & \Lambda & 0 \\ \beta & -\varepsilon & 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 & \varepsilon & \gamma \\ 0 & -\Lambda & \beta & -\varepsilon \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\varepsilon/\Lambda & -\gamma/\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta/\Lambda & \varepsilon/\Lambda \end{array}\right).$$

Ainsi, c est arbitraire ; on le choisit nul. Afin de simplifier les expressions pour a et b, on choisira $d = \Lambda$. Dans ce cas, $a = \gamma$ et $b = -\varepsilon$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\varepsilon \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon & \beta \\ \gamma & -\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\varepsilon \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}.$$

Posons donc le changement de variables

$$\begin{cases} \zeta_1 &= \gamma\eta_1 - \varepsilon\eta_2 \\ \zeta_2 &= \Lambda\eta_2, \end{cases}$$

dont l'inverse est donné par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \eta_1 & = & \frac{1}{\gamma\Lambda}(\Lambda\zeta_1 + \varepsilon\zeta_2) \\ \eta_2 & = & \frac{1}{\Lambda}\eta_2 \end{array} \right. .$$

Le système d'équations (5) devient

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \gamma\dot{\eta}_1 - \varepsilon\dot{\eta}_2 \\ &= \gamma\left[\varepsilon + \beta\eta_2 + \eta_1^2 + \frac{\beta}{\varepsilon}\eta_1\eta_2 + \Theta\varepsilon\eta_2^2 + \Theta\eta_1\eta_2^2\right] \\ &\quad - \varepsilon\left[\gamma\eta_1 - \varepsilon\eta_2 + \Delta\varepsilon\eta_1^2 + \frac{\gamma}{\epsilon}\eta_1\eta_2 - \eta_2^2 + \Delta\eta_1^2\eta_2\right] \\ &= -\Lambda\zeta_2 + \left(\frac{\Delta\varepsilon^2 - \gamma}{\gamma^2}\right)\zeta_1^2 + \left(\frac{-\varepsilon\gamma^2 - \gamma\Lambda^2 + \gamma\varepsilon^2 - 2\Delta\varepsilon^4}{\Lambda\varepsilon\gamma^2}\right)\zeta_1\zeta_2 \\ &\quad + \left(\frac{\Theta\varepsilon\gamma^3 - \gamma\Lambda^2 - \Delta\varepsilon^4}{\Lambda^2\gamma^2}\right)\zeta_2^2 + \left(\frac{-\Delta\varepsilon}{\gamma^2\Lambda}\right)\zeta_1^2\zeta_2 + \left(\frac{\Theta\gamma^2 - 2\Delta\varepsilon^2}{\gamma^2\Lambda^2}\right)\zeta_1\zeta_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{\varepsilon(\Theta\gamma^2 - \Delta\varepsilon^2)}{\gamma^2\Lambda^3}\right)\zeta_2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_2 &= \Lambda\zeta_1 + \left(\frac{\Lambda\Delta\varepsilon}{\gamma^2}\gamma^2\right)\zeta_1^2 + \left(\frac{\gamma^2 + 2\Delta\varepsilon^3}{\varepsilon\gamma^2}\right)\zeta_1\zeta_2 \\ &\quad + \left(\frac{\Delta\varepsilon^3}{\gamma^2\Lambda}\right)\zeta_2^2 + \left(\frac{\Delta}{\gamma^2}\right)\zeta_1^2\zeta_2 + 2\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\gamma^2\Lambda}\right)\zeta_1\zeta_2^2 + \left(\frac{\Delta\varepsilon^2}{\gamma^2\Lambda^2}\right)\zeta_2^3. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'ordinateur et la formule suivante pour calculer le premier coefficient de Lyapunov, l_1 :

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{16\Lambda}\left(-\frac{\partial^2\dot{\zeta}_1}{\partial\zeta_1^2}\frac{\partial^2\dot{\zeta}_2}{\partial\zeta_1^2} + \frac{\partial^2\dot{\zeta}_1}{\partial\zeta_2^2}\frac{\partial^2\dot{\zeta}_2}{\partial\zeta_2^2} + \frac{\partial^2\dot{\zeta}_1}{\partial\zeta_1^2}\frac{\partial^2\dot{\zeta}_1}{\partial\zeta_1\zeta_2}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial^2\dot{\zeta}_1}{\partial\zeta_1\zeta_2}\frac{\partial^2\dot{\zeta}_1}{\partial\zeta_2^2} - \frac{\partial^2\dot{\zeta}_2}{\partial\zeta_1^2}\frac{\partial^2\dot{\zeta}_2}{\partial\zeta_1\zeta_2} - \frac{\partial^2\dot{\zeta}_2}{\partial\zeta_1\zeta_2}\frac{\partial^2\dot{\zeta}_2}{\partial\zeta_2^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial^3\dot{\zeta}_1}{\partial\zeta_1^3} + \frac{\partial^3\dot{\zeta}_2}{\partial\zeta_1^2\zeta_2} + \frac{\partial^3\dot{\zeta}_1}{\partial\zeta_1\zeta_2^2} + \frac{\partial^3\dot{\zeta}_2}{\partial\zeta_2^3}\right). \end{aligned}$$

On obtient :

$$l_1 = \frac{\varepsilon}{8}\frac{-\Lambda^4\Delta - 2\varepsilon^2\Delta\Lambda^2 + \gamma\Delta\varepsilon^2 - \Delta\varepsilon^4 + \Theta\varepsilon\gamma^3 - \gamma^4\Theta + \Delta\varepsilon\gamma\Lambda^2}{\gamma^3\Lambda^4}. \qquad (7)$$

Maintenant, souvenons-nous que sur la courbe de bifurcation C,

$$\varepsilon = \xi_{C_1} = \xi_{C_2} = \frac{\mu_1}{\theta - 1} + \mathcal{O}(\mu_1^2).$$

Négligeons les termes d'ordre $\mathcal{O}(\mu_1^2)$ et remplaçons ε, β, γ et Λ dans (7) par leur valeur en fonction de μ_1. On obtient alors une expression monstrueuse pour le

premier coefficient de Lyapunov. Heureusement, nous ne nous intéressons qu'au signe de l_1 dans un voisinage de $\mu = 0$. On peut donc développer en série de Taylor ce coefficient (après l'avoir multiplié par μ_1^2) et ne calculer que le signe du terme d'ordre inférieur de la série. Cette approche justifie pourquoi on pouvait négliger les termes d'ordre supérieur de ε. En effectuant ce calcul, on trouve

$$\mu_1^2 l_1 = -\frac{1}{8}\frac{(\theta-1)^2}{\delta(\delta\theta-1)^2}[\theta(\theta-1)\Delta + \delta(\delta-1)\Theta] + \mathcal{O}(\mu_1),$$

dont le signe est donné par (4) lorsque $|\mu_1|$ est suffisamment petit. □

Puisque le premier coefficient de Lyapunov est non nul si δ, θ, Δ et Θ satisfont à certaines conditions de non dégénérescence, alors une seule orbite périodique sera créée par la bifurcation de Hopf. En fait, c'est la seule :

Lemme 2.2. *Le système d'équations* (3) *possède au maximum une orbite périodique. Cette orbite est celle issue de la bifurcation de Hopf se produisant au point d'équilibre* ξ_C.

La démonstration de ce lemme est fort complexe. Zoladek [8] en a donné la première preuve. Une preuve plus simple et détaillée est donnée dans [1].

Nous terminons cette section en énonçant les deux lemmes suivants, que nous ne démontrons pas. Le premier peut être démontré en résolvant un long exercice dans [5].

Lemme 2.3. *Dans le cas où* $\delta\theta > 1$, $\delta < 0$ *et* $\theta < 0$, *l'orbite périodique est détruite par une bifurcation homoclinique qui se produit entre les cols* ξ_A *et* ξ_B. *La courbe dans l'espace des paramètres sur laquelle se produit cette bifurcation est donnée par*

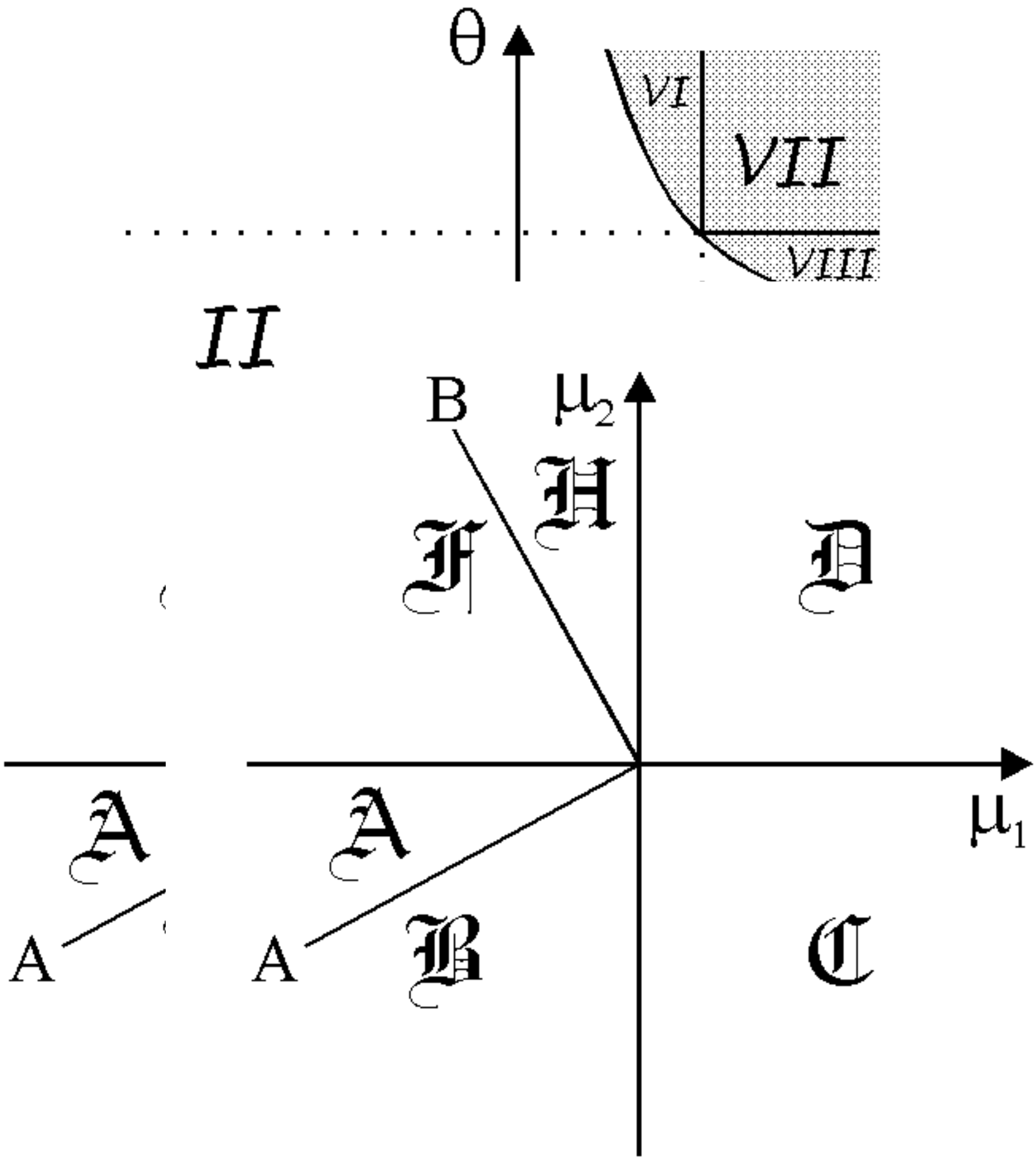
$$Y = \left\{ (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_2 = -\frac{\delta-1}{\theta-1}\mu_1 - \frac{(\theta-1)\Delta + (\delta-1)\Theta}{(\theta-1)^3}\mu_1^2 + \mathcal{O}(\mu_1^3) \right\}.$$

Lemme 2.4. *Si* $\delta\theta > 1$, $\delta > 0$ *et* $\theta > 0$, *alors il existe une courbe* J *dans l'espace des paramètres sur laquelle l'orbite périodique créée par la bifurcation de Hopf "explose", c'est-à-dire que l'orbite devient suffisamment grande pour déborder du voisinage local étudié, et ce quel que soit le voisinage étudié.*

Remarquez que la courbe J dépend du voisinage considéré.

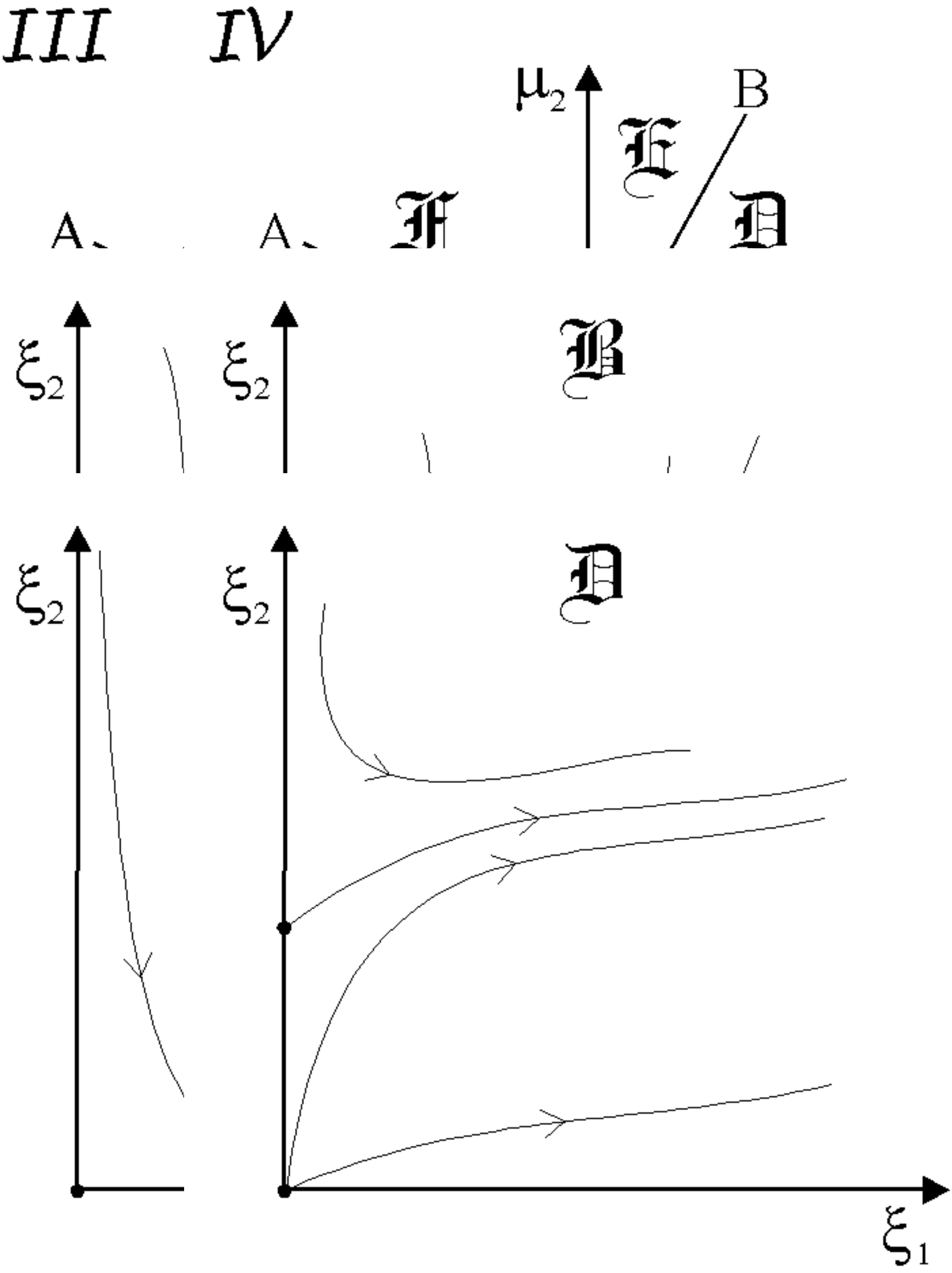
2.3 Diagrammes de bifurcations I

L'espace des paramètres peut être séparé en huit régions distinctes :

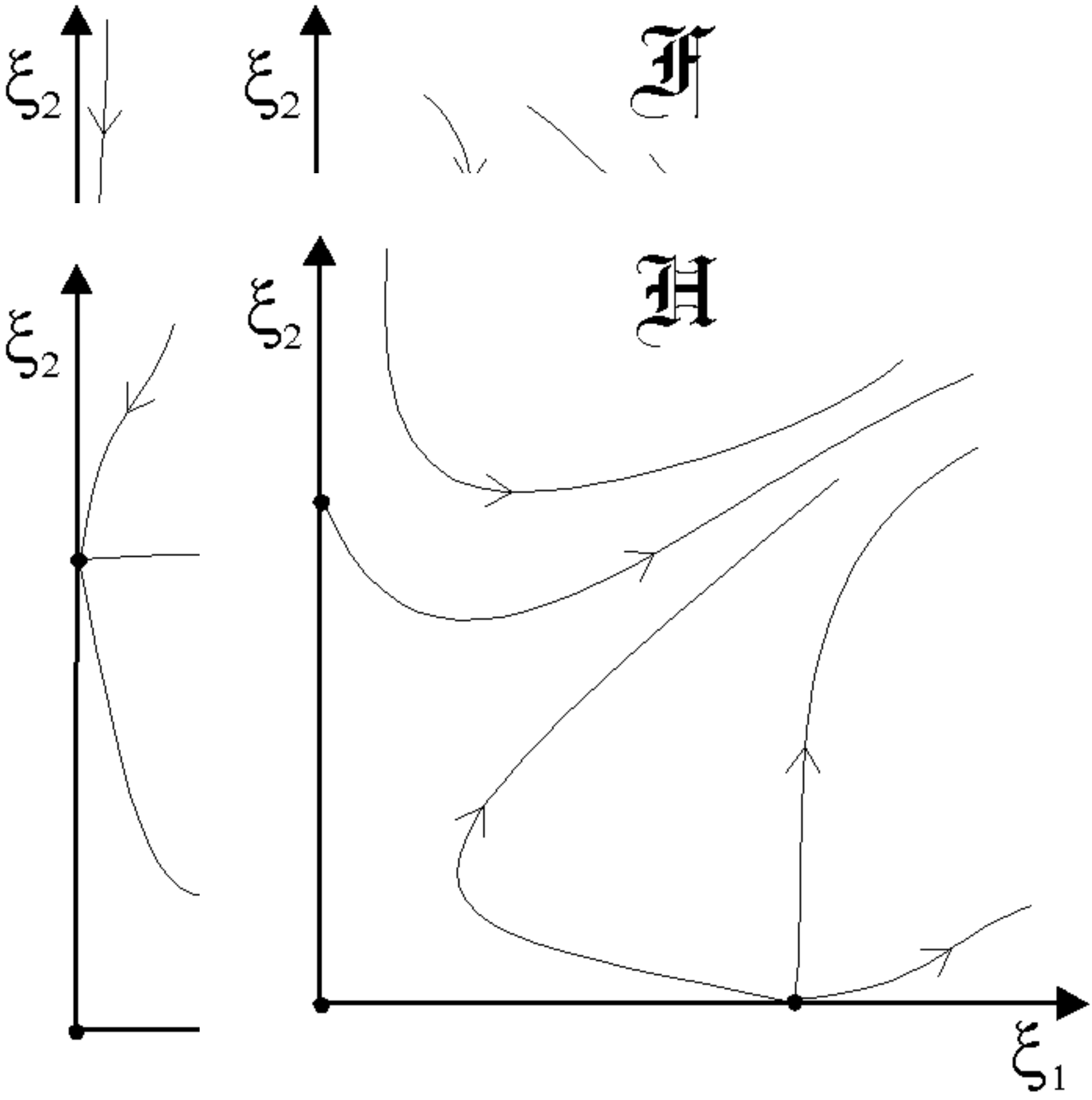


Les
meng
d'orb

[2]Notez que nous représentons les courbes A, B et C comme des droites alors qu'en réalité ce ne sont pas des droites. Cependant, puisque nous ne nous intéressons qu'à $\|\mu\|$ suffisamment petit, ce manque de rigueur est partiellement justifié.



Les l



En fait, les régions traversées par les lignes pointillées se subdivisent en deux parties dont les diagrammes de bifurcations ne sont pas topologiquement équivalents. Cependant, la différence n'est visible qu'à $\mu = 0$ (cf TAKENS [6]).

2.4 Diagrammes de bifurcations II

Examinons maintenant la région V. Dans cette région, $\delta < 0$ et $\theta < 0$ impliquent que les courbes A et B sont situées dans le quatrième quadrant. Leur position relative est l'opposé de la région III car $\delta\theta > 1$ implique que $\delta < 1/\theta$. En d'autres mots, la pente de A à l'origine est plus prononcée que celle de B. Remarquez également que la courbe C est située entre ces deux dernières car

$$\delta\theta > 1 \Rightarrow \delta(\theta - 1) > 1 - \delta \Rightarrow \delta < -\frac{\delta - 1}{\theta - 1}$$

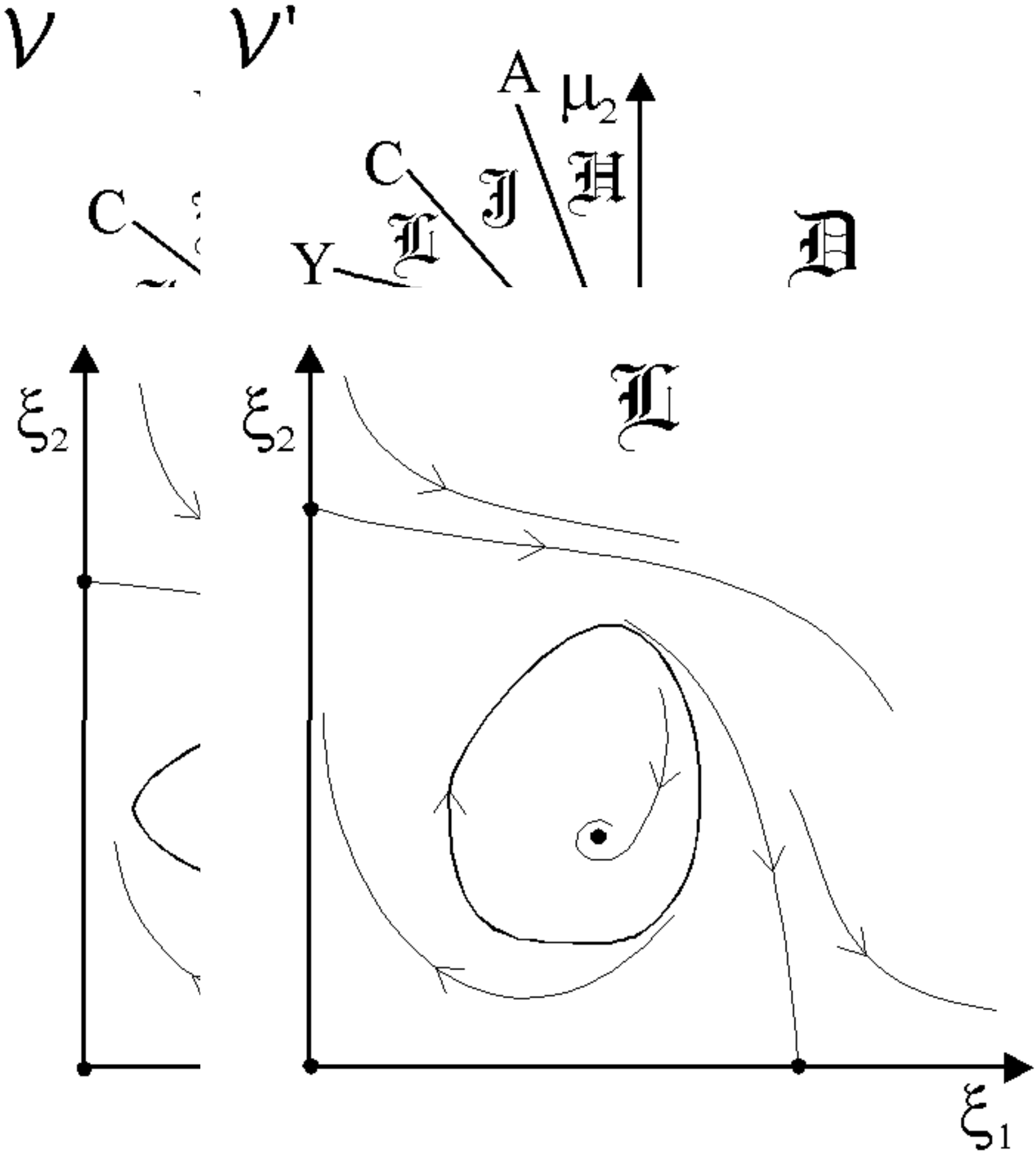
et

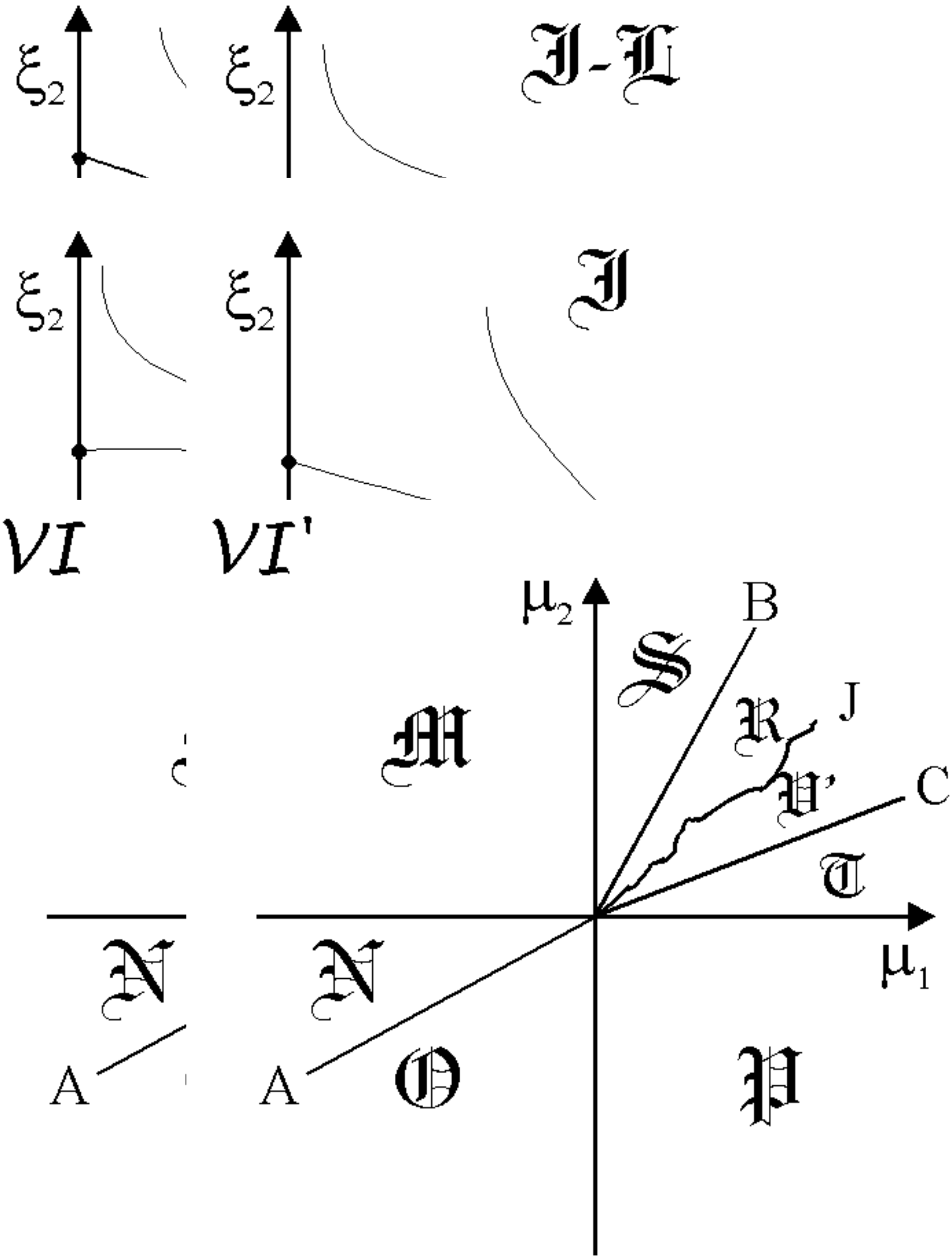
$$\delta\theta > 1 \Rightarrow \delta < \frac{1}{\theta} \Rightarrow \delta - 1 < \frac{1 - \theta}{\theta} \Rightarrow -\frac{\delta - 1}{\theta - 1} < \frac{1}{\theta}.$$

Donc

Il y a
prem
que l

Voici
homo



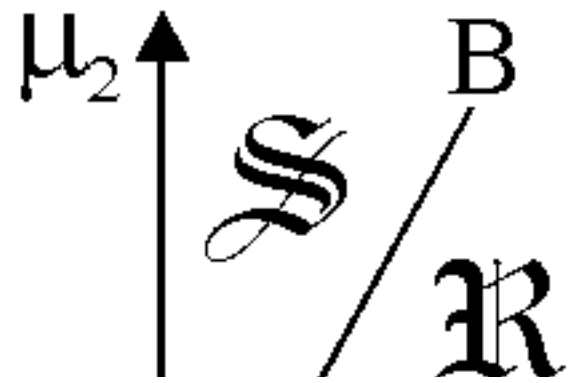


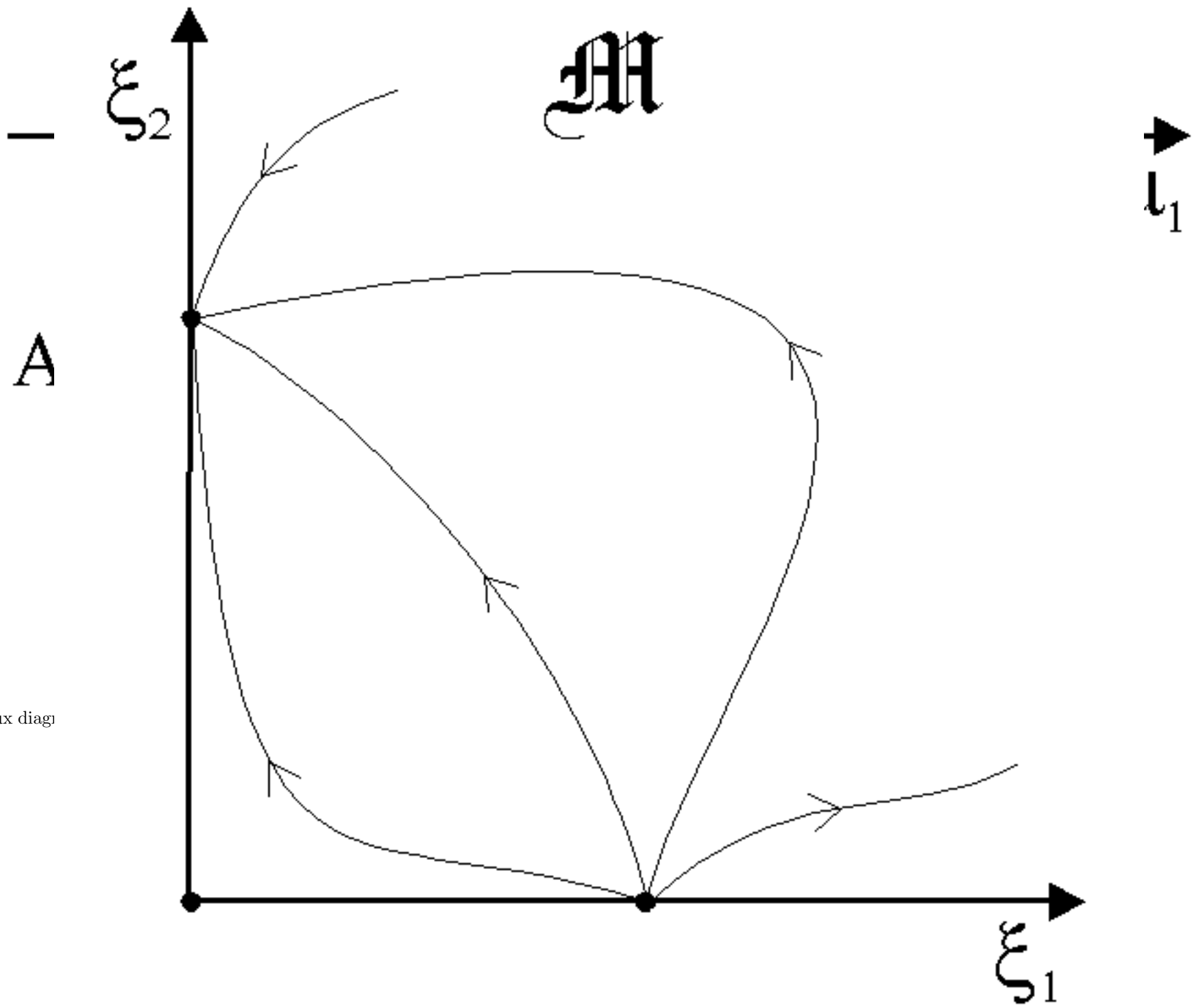
2.5

Cons
resp

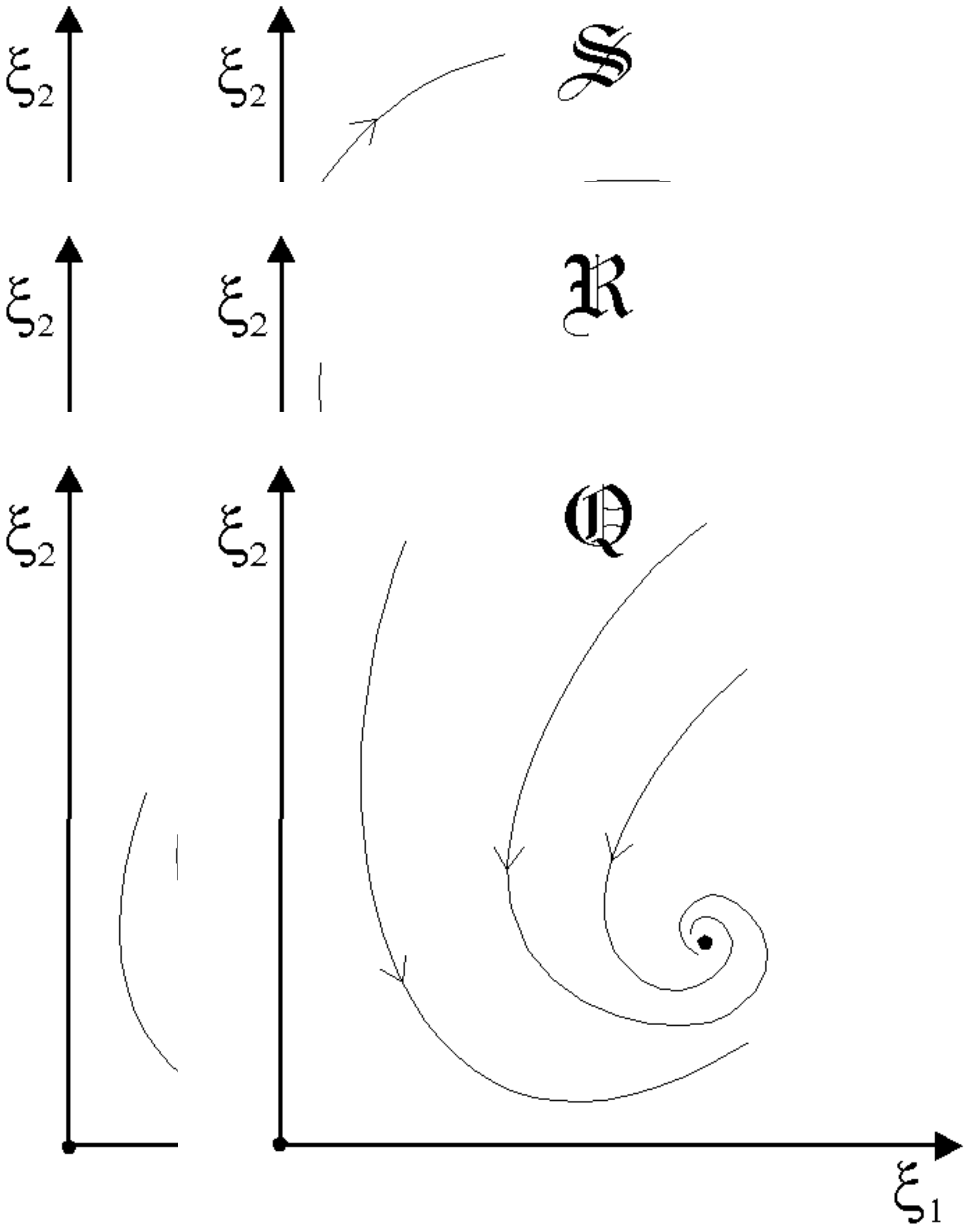
VII VII'

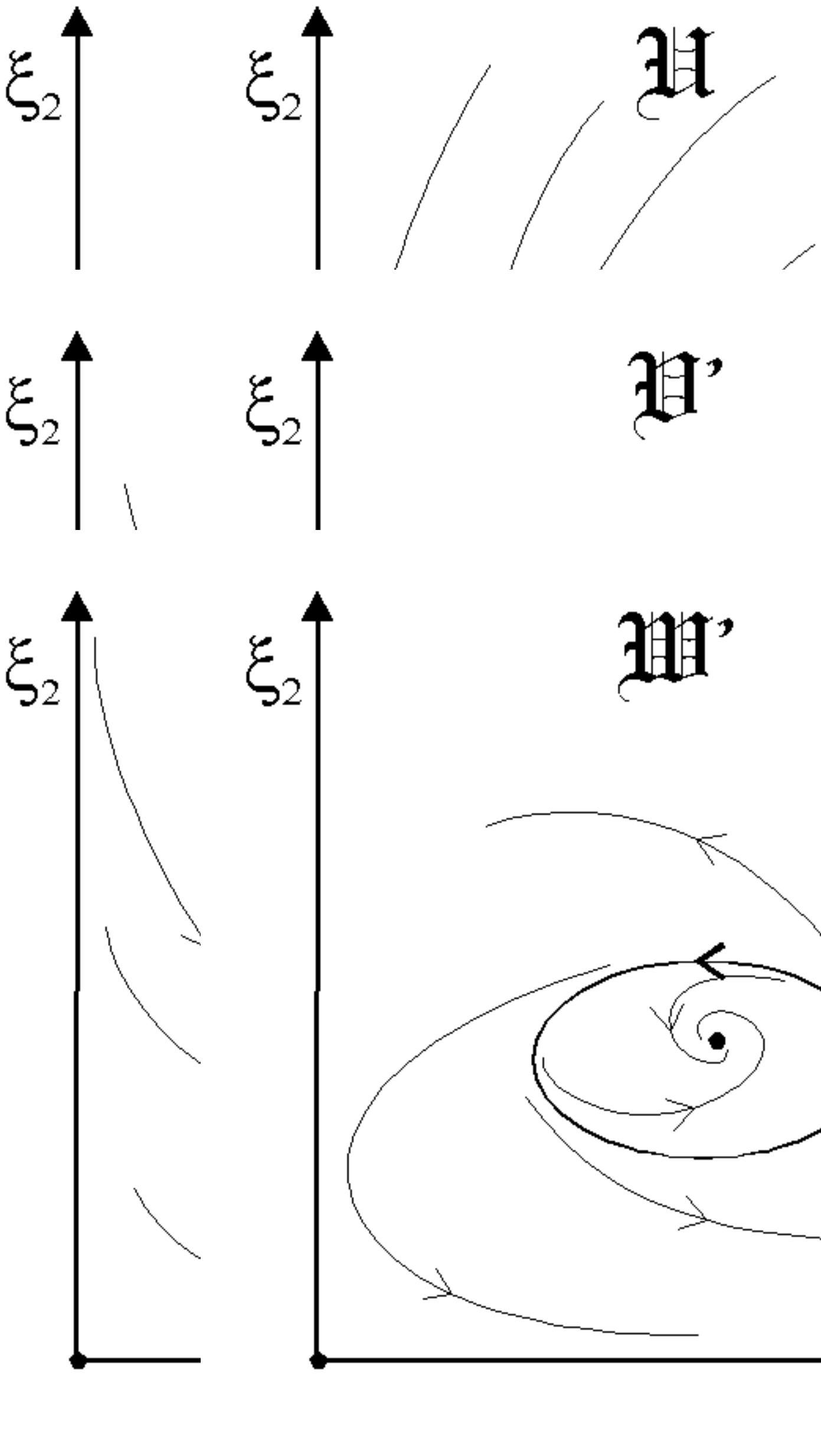
VIII VIII'



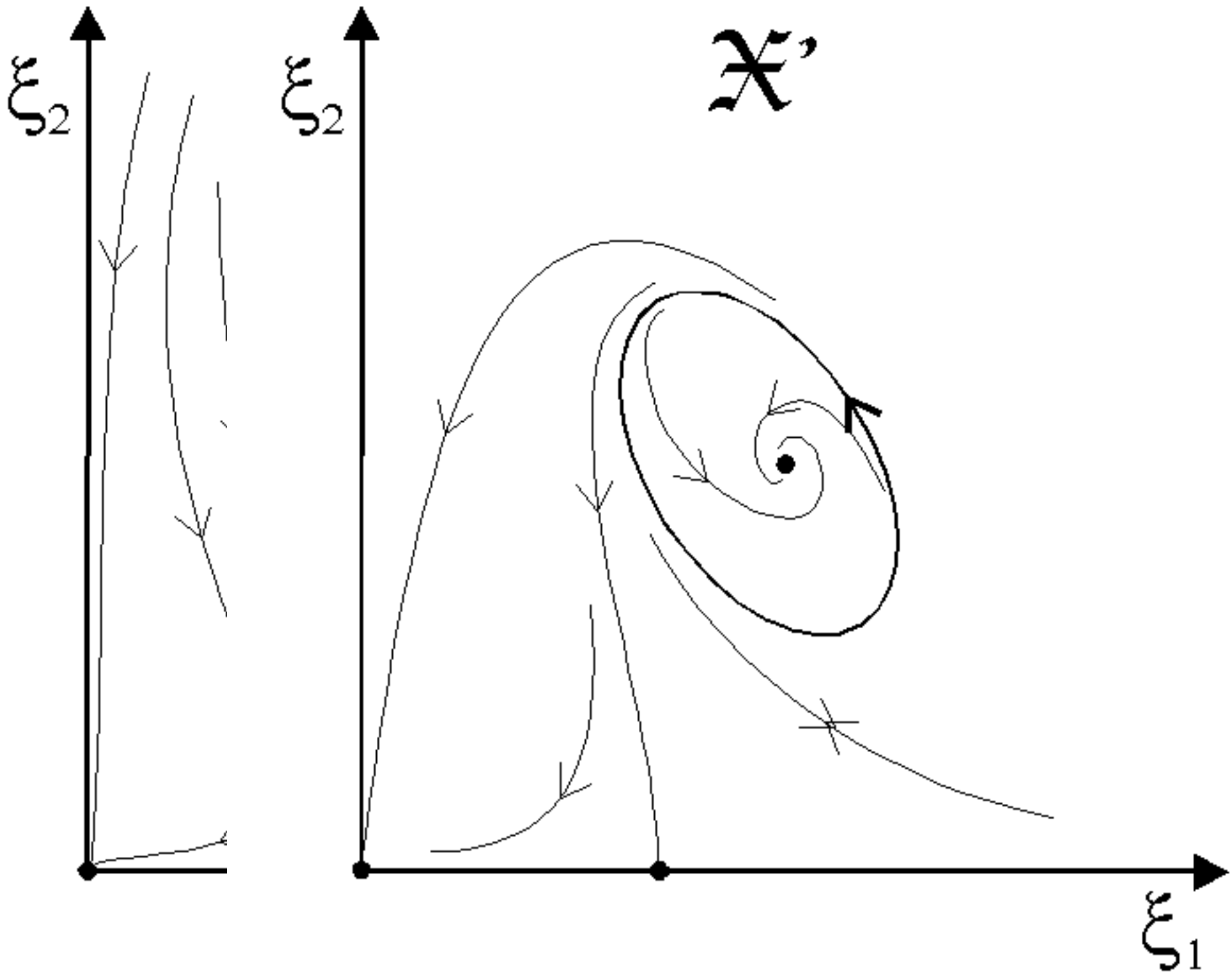


Il y a 9 nouveaux diagr


ξ_2
ξ_2
$\mathfrak{S}$
ξ_2
ξ_2
$\mathfrak{R}$
ξ_2
ξ_2
$\mathfrak{Q}$
ξ_1



Fina
bite



3 En coordonnées polaires

Nous allons maintenant appliquer les résultats des deux sections précédentes au système d'équations suivant, exprimé en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 &= r_1(\mu_1 + p_{11}(\mu)r_1^2 + p_{12}(\mu)r_2^2 + s_1(\mu)r_2^4) \\ \dot{r}_2 &= r_2(\mu_2 + p_{21}(\mu)r_1^2 + p_{22}(\mu)r_2^2 + s_2(\mu)r_1^4) \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega_1(\mu) \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2(\mu), \end{cases} \tag{8}$$

où les fonctions réelles p_{ij}, s_i et $w_i > 0$ dépendent du paramètre $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ de façon différentiable.

3.1 Étude du système d'amplitudes

Le lemme suivant justifie le travail effectué dans les deux premières sections :

Lemme 3.1. *Considérons le système d'amplitudes suivant, tiré du système* (8) *:*

$$\begin{cases} \dot{r}_1 &= r_1(\mu_1 + p_{11}r_1^2 + p_{12}r_2^2 + s_1r_2^4) \\ \dot{r}_2 &= r_2(\mu_2 + p_{21}r_1^2 + p_{22}r_2^2 + s_2r_1^4) \end{cases} \tag{9}$$

et supposons que pour $\|\mu\|$ suffisamment petit, les fonctions différentiables $p_{ij}(\mu)$ satisfassent aux conditions suivantes :

1. $p_{11}(\mu) \neq 0$, $p_{12}(\mu) \neq 0$, $p_{21}(\mu) \neq 0$, $p_{22}(\mu) \neq 0$,
2. $\det p(\mu) = p_{11}(\mu)p_{22}(\mu) - p_{21}(\mu)p_{12}(\mu) \neq 0$.

Alors en effectuant un changement de variables et en reparamétrisant le temps, le système (9) *peut être écrit sous la forme du système* (2) *ou du système* (3).

Démonstration:

Effectuons d'abord le changement de variable

$$\rho_1 = r_1^2, \quad \rho_2 = r_2^2.$$

Puisque $\dot{\rho}_1 = 2r_1\dot{r_1}$ et que $\dot{\rho}_2 = 2r_2\dot{r_2}$, le système (9) devient

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 &= 2\rho_1(\mu_1 + p_{11}\rho_1 + p_{12}\rho_2 + s_1\rho_2^2) \\ \dot{\rho}_2 &= 2\rho_2(\mu_2 + p_{21}\rho_1 + p_{22}\rho_2 + s_2\rho_1^2). \end{cases}$$

Effectuons ensuite le changement de variables

$$\xi_1 = |p_{11}(\mu)|\rho_1, \quad \xi_2 = |p_{22}(\mu)|\rho_2$$

et posons

$$\theta(\mu) = \frac{p_{12}(\mu)}{p_{22}(\mu)}, \quad \delta(\mu) = \frac{p_{21}(\mu)}{p_{11}(\mu)}, \quad \Theta(\mu) = \frac{s_1(\mu)}{p_{22}(\mu)^2}, \quad \Delta(\mu) = \frac{s_2(\mu)}{p_{11}(\mu)^2}.$$

Ce changement de variables est bien défini et inversible car les $p_{ij}(\mu)$ sont non nuls pour $\|\mu\|$ suffisamment petit. De plus, notez que $\theta(\mu) \neq 0$, que $\delta(\mu) \neq 0$ et que la condition $\det p(\mu) \neq 0$ implique que $\delta(\mu)\theta(\mu) \neq 1$. Finalement, reparamétrisons le temps :

$$\tau = 2t.$$

Ainsi,

$$\dot{\xi}_1 = \frac{d\xi_1}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{|p_{11}|}{2}\dot{\rho}_1 = \xi_1\left(\mu_1 + \frac{p_{11}}{|p_{11}|}\xi_1 + \theta\frac{p_{22}}{|p_{22}|}\xi_2 + \Theta\xi_2^2\right)$$

et de façon similaire

$$\dot{\xi}_2 = \xi_2\left(\mu_1 + \frac{p_{22}}{|p_{22}|}\xi_2 + \delta\frac{p_{11}}{|p_{11}|}\xi_1 + \Delta\xi_1^2\right).$$

On doit considérer les quatre cas suivants :

- $p_{11} < 0$ et $p_{22} < 0$. Dans ce cas, on a exactement le système (2), qui est localement topologiquement équivalent au système (1).
- $p_{11} > 0$ et $p_{22} < 0$. Cette fois, on a exactement le système d'équations (3).
- $p_{11} < 0$ et $p_{22} > 0$. Dans ce cas, on pose $\tilde{p}(\mu) = -p(\mu)$. Ainsi δ et θ demeurent inchangés et on se retrouve avec le même système d'équations que dans le deuxième cas.
- $p_{11} > 0$ et $p_{22} > 0$. Comme précédemment, on pose $\tilde{p}(\mu) = -p(\mu)$ pour obtenir le même système d'équations que dans le premier cas.

Ce qui termine la preuve. □

3.2 Interprétation géométrique

Maintenant que nous connaissons la dynamique du système d'amplitudes (9), nous connaissons également la dynamique du système d'équations (8) dans l'espace à quatre dimensions. En effet, en intégrant les équations pour $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$,

on déduit que les trajectoires tournent à vitesse constante dans le sens anti-horaire dans les plans (r_1, φ_1) et (r_2, φ_2). Ainsi, le point d'équilibre à l'origine du système (9) demeure un point d'équilibre à l'origine pour le système (8). Un point d'équilibre $(r_1, r_2) = (c_1, 0)$ de (9) devient une trajectoire circulaire dans l'espace à quatre dimensions. Cette trajectoire est située dans le plan (r_1, φ_1). Ainsi, la bifurcation du point d'équilibre à l'origine du système d'amplitude (9) correspond à une bifurcation de Hopf pour le système (8).

Un point d'équilibre $(r_1, r_2) = (c_1, c_2)$ représente quant à lui un tore de dimension deux — $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ pour les topologistes. Attardons-nous un peu plus sur ce cas. Le tore est formé du produit (au sens topologique) du cercle de rayon c_1 dans le plan (r_1, φ_1) avec le cercle de rayon c_2 dans le plan (r_2, φ_2). Ce tore est un ensemble invariant pour le flot décrit par le système d'équations (8). À ce moment de la discussion, une question vient spontanément à l'esprit. Peut-on voir ce tore ? Autrement dit, existe-t-il un sous-espace de dimension trois contenant le tore dans son entier, un peu comme un cercle dans l'espace doit reposer sur un plan ? L'exemple suivant répond à cette question.

Exemple:

Supposons q'à $\mu = \mu_0$ le système d'amplitudes (9) possède un point d'équilibre $(r_1, r_2) = (1, 4)$ et que $(\omega_1(\mu_0), \omega_2(\mu_0)) = (\sqrt{2}, 1)$. Considérons la trajectoire

$$\begin{cases} r_1(t) &= 1 \\ r_2(t) &= 4 \\ \varphi_1(t) &= \sqrt{2}t \\ \varphi_2(t) &= t \end{cases}$$

qui devient en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(\sqrt{2}t) \\ y(t) &= \sin(\sqrt{2}t) \\ z(t) &= 4\cos(t) \\ w(t) &= 4\sin(t). \end{cases}$$

Le vecteur tangent à la courbe $f(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ au point t_0 est donné par $f'(t_0)$, où $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t), w'(t))$. Calculons les vecteurs tangents en quatre points de la courbe, soit à $t_1 = \sqrt{2}\pi/4$, à $t_2 = 0$, à $t_3 = \sqrt{2}\pi/2$ et à $t_4 = -\sqrt{2}\pi/4$, et vérifions s'ils sont linéairement indépendants en calculant le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} f'(t_1) \\ f'(t_2) \\ f'(t_3) \\ f'(t_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -4\sin(\sqrt{2}\pi/4) & 4\cos(\sqrt{2}\pi/4) \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 4 \\ 0 & -\sqrt{2} & -4\sin(\sqrt{2}\pi/2) & 4\cos(\sqrt{2}\pi/2) \\ \sqrt{2} & 0 & 4\sin(\sqrt{2}\pi/4) & 4\cos(\sqrt{2}\pi/4) \end{pmatrix}.$$

En additionnant la première rangée à la quatrième et la deuxième à la troisième

on obtient

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -4\sin(\sqrt{2}\pi/4) & 4\cos(\sqrt{2}\pi/4) \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4\sin(\sqrt{2}\pi/2) & 4+4\cos(\sqrt{2}\pi/2) \\ 0 & 0 & 0 & 8\cos(\sqrt{2}\pi/4) \end{pmatrix},$$

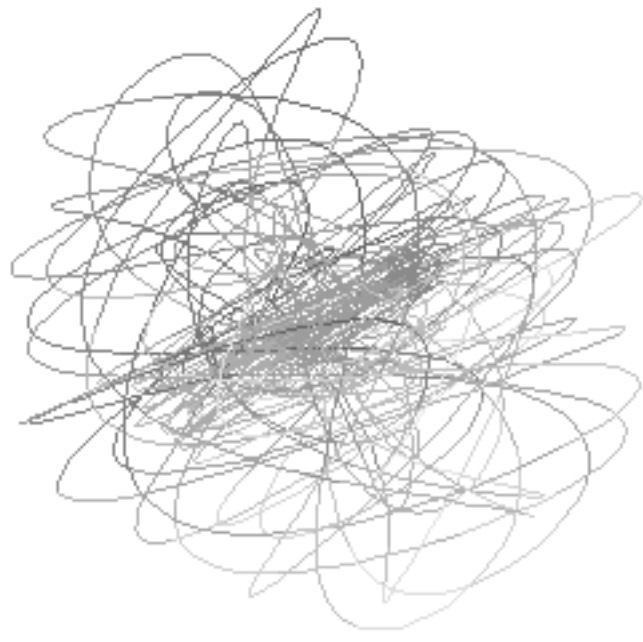
ce qui nous donne 4 pour le rang de la matrice. Puisque nos quatre vecteurs tangents sont linéairement indépendants, le tore n'est pas situé dans un sous espace tridimensionnel de $\mathbb{R}^4$. Ainsi, nous devrons nous contenter de projeter le tore dans un sous-espace tridimensionnel. □

Les bifurcations transcritiques des points d'équilibres sur les axes $\mu_{1,2}$ du système d'amplitude (9) correspondent dans le système (8) à des bifurcations où une orbite circulaire se transforme soudainement en un tore invariant. Ces bifurcations se traduisent par une bifurcation de Neimark-Sacker pour l'application de Poincaré associée à l'orbite périodique.

Fina
ce ca
un t
donc
trois

Exe

Cons



qui p
diagr
dans
pour

Ce qui prouve qu'on peut faire de l'art en mathématiques ! □

4 Termes d'ordre supérieur

Le système (8), que nous avons étudié dans la section précédente, est un cas particulier du système plus général suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{r}_1 & = & r_1\left(\mu_1 + p_{11}(\mu)r_1^2 + p_{12}(\mu)r_2^2 + s_1(\mu)r_2^4\right) + \Phi_1(r,\varphi,\mu) \\ \dot{r}_2 & = & r_2\left(\mu_2 + p_{21}(\mu)r_1^2 + p_{22}(\mu)r_2^2 + s_2(\mu)r_1^4\right) + \Phi_2(r,\varphi,\mu) \\ r_1\dot{\varphi}_1 & = & r_1\omega_1(\mu) + \Psi_1(r,\varphi,\mu) \\ r_2\dot{\varphi}_2 & = & r_2\omega_2(\mu) + \Psi_2(r,\varphi,\mu), \end{array}\right. \tag{10}$$

où les fonctions réelles $p_{ij}(\mu)$, $s_i(\mu)$ sont différentiables pour $\|\mu\|$ suffisamment petit, les fonctions réelles positives $\omega_i(\mu)$ sont également différentiables pour $\|\mu\|$ suffisamment petit et les fonctions $\Phi_i = \mathcal{O}(\|r\|^6)$ et Ψ_i sont périodiques (de période 2π) en φ_i.

[...]

Une recherche plus approfondie sera nécessaire. Kuznetsov [5] en donne les grandes lignes. Il n'y a pas équivalence topologique entre les systèmes (10) et (8). Cependant, on peut montrer que les bifurcations de Hopf et de Neimark-Sacker subsistent lorsqu'on ajoute des termes d'ordre supérieur. Par contre, le flot sur le tore est différent dans les deux systèmes. De plus, le tore n'existe que près de la bifurcation de Neimark-Sacker ; il est rapidement détruit lorsqu'on s'éloigne de la courbe de bifurcation.

5 En coordonnées complexes

Considérons maintenant le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{z}_1 = \lambda_1(\alpha)z_1 + g(z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2,\alpha) \\ \dot{z}_2 = \lambda_2(\alpha)z_2 + h(z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2,\alpha), \end{array}\right. \tag{11}$$

où $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$ est un paramètre, où les $\lambda_{1,2}$ sont différentiables en α et tels que $\lambda_{1,2}(0) = i\omega_{1,2}(0)$, $w_{1,2}(0) > 0$ et où les fonctions g et h sont suffisamment différentiables pour être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} g(z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2,\alpha) &= \sum_{2\le j+k+l+m\le 5} \frac{g_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} z_1^j \overline{z}_1^k z_2^l \overline{z}_2^m + \mathcal{O}(\|z\|^6) \\ h(z_1,\overline{z}_1,z_2,\overline{z}_2,\alpha) &= \sum_{2\le j+k+l+m\le 5} \frac{h_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} z_1^j \overline{z}_1^k z_2^l \overline{z}_2^m + \mathcal{O}(\|z\|^6), \end{aligned}$$

où les g_{jklm} et les h_{jklm} sont différentiables en α pour $\|\alpha\|$ suffisamment petit. On supposera également que $\dot{\overline{z}}_1 = \overline{\dot{z}}_1$ et que $\dot{\overline{z}}_2 = \overline{\dot{z}}_2$.

5.1 Forme normale de Poincaré-Birkhoff

Afin de déterminer quels seront les coefficients dits résonants dans la forme normale du système (11), considérons l'équation suivante pour $\dot{z}_1$:

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\alpha)z_1 + U_1(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \alpha) + V_1(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \alpha) + \mathcal{O}(\|z\|^{n+1}) \quad (12)$$

où U_1 représente les termes d'ordre $2, 3, \ldots, n-1$ de l'équation (11) tandis que V_1 représente les termes d'ordre n, où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Effectuons le changement de variable localement inversible

$$z_1 = w_1 + W_1(w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2, \alpha) \quad (13)$$
$$z_2 = w_2 + W_2(w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2, \alpha) \quad (14)$$

où W_1 et W_2 ne contiennent que des termes d'ordre n en z. En choisissant soigneusement les coefficients de W_1 et de W_2, nous tenterons d'éliminer les termes d'ordre n dans l'équation (12).

En substituant (13) et (14) dans (12), on obtient

$$\dot{w}_1 + \dot{W}_1 = \lambda_1(w_1 + W_1) + U_1(w_1 + W_1, \ldots) + V_1(\ldots) + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}). \quad (15)$$

Notez que

$$U_1(w_1 + W_1, \overline{w}_1 + \overline{W}_1, \ldots) = U_1(w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2, \alpha) + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1})$$

et que

$$V_1(w_1 + W_1, \overline{w}_1 + \overline{W}_1, \ldots) = V_1(w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2, \alpha) + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}).$$

Ainsi, (15) devient

$$\dot{w}_1 = \lambda_1 w_1 + U_1 + \lambda_1 W_1 - \dot{W}_1 + V_1 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}). \quad (16)$$

Or,

$$\dot{W}_1 = \frac{\partial W_1}{\partial w_1}\dot{w}_1 + \frac{\partial W_1}{\partial \overline{w}_1}\dot{\overline{w}}_1 + \frac{\partial W_1}{\partial w_2}\dot{w}_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \overline{w}_2}\dot{\overline{w}}_2$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\dot{w}_1 &= \frac{\partial W_1}{\partial w_1}(\dot{z}_1 + \mathcal{O}(\|w\|^n)) \\
&= \frac{\partial W_1}{\partial w_1}(\lambda_1 z_1 + U_1 + V_1 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}) + \mathcal{O}(\|w\|^n)) \\
&= \frac{\partial W_1}{\partial w_1}(\lambda_1 z_1 + \mathcal{O}(\|w\|^2) \\
&= \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial w_1}(w_1 + W_1) + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}) \\
&= \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial w_1} w_1 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1})
\end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\dot{W}_1 = \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial w_1} w_1 + \overline{\lambda}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \overline{w}_1} \overline{w}_1 + \lambda_2 \frac{\partial W_1}{\partial w_2} w_2 + \overline{\lambda}_2 \frac{\partial W_1}{\partial \overline{w}_2} \overline{w}_2 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}).$$

Remarquez que $\dot{W}_1$ ne contient que des termes d'ordre supérieur ou égal à n.
En substituant cette dernière équation dans (16), on obtient

$$\dot{w}_1 = \lambda_1 w_1 + U_1 + Z_1 + \mathcal{O}(\|w\|^{n+1}), \tag{17}$$

où

$$Z_1 = \lambda_1 W_1 - \left(\lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial w_1} w_1 + \overline{\lambda}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \overline{w}_1} \overline{w}_1 + \lambda_2 \frac{\partial W_1}{\partial w_2} w_2 + \overline{\lambda}_2 \frac{\partial W_1}{\partial \overline{w}_2} \overline{w}_2 \right) + V_1.$$

Les changements de variables (13) et (14) n'ont donc pas modifié les termes d'ordre inférieur à n. Afin de simplifier l'équation (17) au maximum, on aimerait que Z_1 soit nul. Puisque

$$\begin{aligned} V_1(w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2, \alpha) &= \sum_{j+k+l+m=n} \frac{v_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} w_1^j \overline{w}_1^k w_2^l \overline{w}_2^m \\ W_1(w_1, \overline{w}_1, w_2, \overline{w}_2, \alpha) &= \sum_{j+k+l+m=n} \frac{\tilde{g}_{jklm}(\alpha)}{j!k!l!m!} w_1^j \overline{w}_1^k w_2^l \overline{w}_2^m, \end{aligned}$$

alors Z_1 sera nul si et seulement si

$$(\lambda_1 - \lambda_1 j - \overline{\lambda}_1 k - \lambda_2 l - \overline{\lambda}_2 m)\tilde{g}_{jklm} + v_{jklm} = 0$$

pour tout (j, k, l, m) tels que $j + k + l + m = n$. L'inconnu étant $\tilde{g}_{jklm}$, cette équation possédera une solution si

$$(\lambda_1(\alpha) - \lambda_1(\alpha) j - \overline{\lambda}_1(\alpha) k - \lambda_2(\alpha) l - \overline{\lambda}_2(\alpha) m) \neq 0$$

pour tout $\|\alpha\|$ suffisamment petit. Puisque $\lambda_{1,2}$ sont différentiables en α, il suffit que l'équation ci-haut soit vérifiée en $\alpha = 0$. Plus précisément, on veut s'assurer que

$$i\omega_1(1 - j + k) + i\omega_2(-l + m) \neq 0. \tag{18}$$

Ainsi, il faut éviter que

$$\begin{cases} 1 &= j - k \\ m &= l \end{cases}$$

pour $j+k+l+m = n$. En solutionnant ce système pour $n = 2, 3, 4, 5$, on trouve les quadruplets suivants :

$$\begin{gathered} (1,0,1,1), (1,0,2,2) \\ (2,1,0,0), (2,1,1,1) \\ (3,2,0,0). \end{gathered}$$

En examinant attentivement l'équation (18), on s'aperçoit qu'il faut également éviter que $\omega_1(\alpha)$ et que $\omega_2(\alpha)$ soient dans un rapport $1:1$, $1:2$, $1:3$, $2:3$, $1:4$ ou $1:5$. Lorsque $\omega_1(0)$ et $\omega_2(0)$ sont dans un de ces rapports, on dit qu'il y a résonance dans la bifurcation de Hopf. Ces cas sont difficiles à étudier et dépassent de loin le niveau de cet article. Toutes ces observations justifient le lemme suivant :

Lemme 5.1 (Forme normale). *Supposons que $\omega_1(0)$ et $\omega_2(0)$ ne soient pas dans un rapport de $1:1$, $1:2$, $1:3$, $2:3$, $1:4$ ou $1:5$. Alors pour $\|\alpha\|$ petit, le système (11) est localement topologiquement équivalent par fibres au système*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{w}_1 &=& \lambda_1(\alpha)w_1 + G_{2100}(\alpha)w_1^2\overline{w}_1 + G_{1011}(\alpha)w_1w_2\overline{w}_2 \\ && + G_{3200}(\alpha)w_1^3\overline{w}_1^2 + G_{2111}(\alpha)w_1^2\overline{w}_1w_2\overline{w}_2 + G_{1022}(\alpha)w_1^2w_2^2\overline{w}_2^2 \\ && + \mathcal{O}(\|w\|^6) \\ \dot{w}_2 &=& \lambda_2(\alpha)w_2 + H_{1110}(\alpha)w_1\overline{w}_1w_2 + H_{0021}(\alpha)w_2^2\overline{w}_2 \\ && + H_{2210}(\alpha)w_1^2\overline{w}_1^2w_2 + H_{1121}(\alpha)w_1\overline{w}_1w_2^2\overline{w}_2 + H_{0032}(\alpha)w_2^3\overline{w}_2^2 \\ && + \mathcal{O}(\|w\|^6). \end{array}\right. \tag{19}$$

En omettant la dépendance de α pour alléger la notation, les coefficients G_{jklm} d'ordre 3 sont donnés par :

$$\begin{aligned} G_{2100} &= \frac{1}{2}g_{2100} - \frac{g_{2000}g_{1100}}{\lambda_1} - \frac{g_{1010}h_{1100}}{\lambda_2} \\ &\quad - \frac{g_{1100}(2\overline{g}_{1100} + g_{2000})}{2\overline{\lambda}_1} - \frac{g_{1001}\overline{h}_{1100}}{\overline{\lambda}_2} \\ &\quad - \frac{g_{0200}\overline{g}_{0200}}{2(2\overline{\lambda}_1 - \lambda_1)} - \frac{g_{0110}h_{2000}}{2(\overline{\lambda}_1 - \lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{g_{0101}\overline{h}_{0200}}{2(\overline{\lambda}_1 - \lambda_1 + \overline{\lambda}_2)} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} G_{1011} &= g_{1011} - \frac{g_{2000}g_{0011}}{\lambda_1} - \frac{g_{1010}(g_{1001} + h_{0011})}{\lambda_2} \\ &\quad - \frac{g_{1100}\overline{g}_{0011}}{\overline{\lambda}_1} - \frac{g_{1001}(g_{1010} + \overline{h}_{0011})}{\overline{\lambda}_2} \\ &\quad - \frac{g_{0020}h_{1001}}{2\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{g_{0002}\overline{h}_{0101}}{2\overline{\lambda}_2 - \lambda_1} - \frac{g_{0110}\overline{g}_{0110}}{\overline{\lambda}_1 - \lambda_1 + \lambda_2} \\ &\quad - \frac{g_{0101}\overline{g}_{0101}}{\overline{\lambda}_1 - \lambda_1 + \overline{\lambda}_2} - \frac{g_{0011}(h_{1010} + \overline{h}_{0110})}{\overline{\lambda}_2 - \lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned} \tag{21}$$

Les coefficients H_{jklm} sont donnés par des formules similaires à G_{lmjk} ; il suffit d'interchanger λ_1 et λ_2 et de remplacer les indices $jklm$ par $lmjk$.

Démonstration:

Nous avons déjà justifié pourquoi certains termes de la série de Taylor ne pouvaient être annulés par un changement de coordonnées analytique. Les formules données pour les coefficients résonants peuvent être dérivées à l'aide de l'ordinateur. Avec Maple, il suffit d'entrer les systèmes d'équations (11) et (19) en

omettant la dépendance de α et de définir le changement de variable

$$\begin{aligned} W_1 &= z_1 + \sum_{2\le j+k+l+m\le 5} \frac{\tilde g_{jklm}}{j!k!l!m!} z_1^j \overline{z}_1^k z_2^l \overline{z}_2^m \\ W_2 &= z_2 + \sum_{2\le j+k+l+m\le 5} \frac{\tilde h_{jklm}}{j!k!l!m!} z_1^j \overline{z}_1^k z_2^l \overline{z}_2^m \end{aligned}$$

où $\tilde g_{2100}$, $\tilde g_{1011}$, $\tilde g_{3200}$ $\tilde g_{2111}$, $\tilde g_{1022}$, $\tilde h_{1110}$, $\tilde h_{0021}$, $\tilde h_{2210}$, $\tilde h_{1121}$ et $\tilde h_{0032}$ sont nuls. On remplace ensuite w_1 et w_2 par W_1 et W_2 dans (11) et on calcule les termes d'ordre inférieur à 6 du développement en série de Taylor de

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \dot w_1 - \underbrace{\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\dot z_1 + \frac{\partial W_1}{\partial \overline{z}_1}\dot{\overline{z}}_1 + \frac{\partial W_1}{\partial z_2}\dot z_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \overline{z}_2}\dot{\overline{z}}_2\right)}_{\dot W_1} \\ \Delta_2 &= \dot w_2 - \underbrace{\left(\frac{\partial W_2}{\partial z_1}\dot z_1 + \frac{\partial W_2}{\partial \overline{z}_1}\dot{\overline{z}}_1 + \frac{\partial W_2}{\partial z_2}\dot z_2 + \frac{\partial W_2}{\partial \overline{z}_2}\dot{\overline{z}}_2\right)}_{\dot W_2} \end{aligned}$$

et on choisit les $\tilde g$ et les $\tilde h$ de façon à annuler les coefficients des termes de Δ_1 et de Δ_2. Les coefficients G_{jklm} et H_{jklm} devront également être choisis de façon à annuler coefficients des termes $z_1^j \overline{z}_1^k z_2^l \overline{z}_2^m$ de Δ_1 et Δ_2. □

5.2 Simplifications additionnelles

En reparamétrisant le temps et en effectuant des changements de variables impliquant les termes résonants, le système d'équations (19) peut être légèrement simplifié :

Lemme 5.2. *En supposant que* $\operatorname{Re} G_{2100}(0) \neq 0$*, que* $\operatorname{Re} G_{1011}(0) \neq 0$*, que* $\operatorname{Re} G_{1110}(0) \neq 0$ *et que* $\operatorname{Re} G_{0021}(0) \neq 0$*, le système d'équations* (19) *est localement topologiquement équivalent par fibres au système*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot v_1 &=& \lambda_1(\alpha)v_1 + P_{11}(\alpha)v_1|v_1|^2 + P_{12}(\alpha)v_1|v_2|^2 \\ && + iR_1(\alpha)v_1|v_1|^4 + S_1(\alpha)v_1|v_2|^4 \\ && + \mathcal{O}(\|v\|^6) \\ \dot v_2 &=& \lambda_2(\alpha)v_2 + P_{21}(\alpha)v_2|v_1|^2 + P_{22}(\alpha)v_2|v_2|^2 \\ && + iR_2(\alpha)v_2|v_2|^4 + S_1(\alpha)v_2|v_1|^4 \\ && + \mathcal{O}(\|v\|^6) \end{array}\right. , \tag{22}$$

où les fonctions complexes P_{ij}*,* S_i *et les fonctions réelles* R_i *sont différentiables en* α *pour* $\|\alpha\|$ *suffisamment petit.*

Démonstration:

Reparamétrisons d'abord le temps en utilisant

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 + e_1(\alpha)|w_1|^2 + e_2(\alpha)|w_2|^2,$$

où les fonctions réelles $e_1(\alpha)$ et $e_2(\alpha)$ seront définies ultérieurement. Dans ce nouveau temps, (19) devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{w}_1 &=& \lambda_1 w_1 + (\lambda_1 e_1 + G_{2100}) w_1^2 \overline{w}_1 + (\lambda_1 e_2 + G_{1011}) w_1 w_2 \overline{w}_2 \\ && + (G_{2100} e_1 + G_{3200}) w_1^3 \overline{w}_1^2 \\ && + (G_{1011} e_1 + G_{2100} e_2 + G_{2111}) w_1^2 \overline{w}_1 w_2 \overline{w}_2 \\ && + (G_{1011} e_2 + G_{1022}) w_1^2 w_2^2 \overline{w}_2^2 \\ && + \mathcal{O}(\|w\|^6) \\ \dot{w}_2 &=& \lambda_2 w_2 + (\lambda_2 e_1 + H_{1110}) w_1 \overline{w}_1 w_2 + (\lambda_2 e_2 + H_{0021}) w_2^2 \overline{w}_2 \\ && + (H_{1110} e_1 + H_{2210}) w_1^2 \overline{w}_1^2 w_2 \\ && + (H_{0021} e_1 + H_{1110} e_2 + H_{1121}) w_1 \overline{w}_1 w_2^2 \overline{w}_2 \\ && + (H_{0021} e_2 + H_{0032}) w_2^3 \overline{w}_2^2 \\ && + \mathcal{O}(\|w\|^6). \end{array}\right. \tag{23}$$

Effectuons maintenant un changement de variables localement inversible et dépendant (de façon différentiable) de α. Posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_1 &=& w_1 + K_1(\alpha) w_1 |w_1|^2 \\ v_2 &=& w_2 + K_2(\alpha) w_2 |w_2|^2, \end{array}\right. \tag{24}$$

où les fonctions complexes $K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha)$ sont données par

$$\begin{array}{rcl} K_1 &=& -\dfrac{G_{2111} + G_{1011} e_1 + G_{2100} e_2}{(\lambda_1 + \overline{\lambda}_1) e_2 + G_{1011} + \overline{G}_{1011}} \\ K_2 &=& -\dfrac{H_{1121} + H_{0021} e_1 + H_{1110} e_2}{(\lambda_2 + \overline{\lambda}_2) e_1 + H_{1110} + \overline{H}_{1110}}. \end{array}$$

Ces fonctions sont différentiables en α pour $\|\alpha\|$ suffisamment petit car les dénominateurs de $K_1(0)$ et de $K_2(0)$ sont donnés par $2\mathrm{Re}G_{1011}$ et par $2\mathrm{Re}H_{1110}$, qui sont non nuls par hypothèse. L'inverse du changement de variables (24) se calcule aisément. En effet,

$$\begin{array}{rcl} w_1 &=& v_1 - K_1 w_1 |w_1|^2 \\ &=& v_1 - K_1 (v_1 - K_1 w_1 |w_1|^2)^2 (v_1 - K_1 w_1 |w_1|^2) \\ &=& v_1 - K_1 v_1 |v_1|^2 + K_1^2 v_1^2 w_1 |w_1|^2 + 2K_1^2 |v_1|^2 w_1 |w_1|^2 + \mathcal{O}(\|w\|^6) \\ &=& v_1 - K_1 v_1 |v_1|^2 + (2K_1^2 + |K_1|^2) v_1 |v_1|^4 + \mathcal{O}(\|v\|^6). \end{array} \tag{25}$$

w_2 peut être exprimé de façon similaire en fonction de v_2. Nous pouvons maintenant calculer $\dot{v}_1$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{v}_1 &=& \dot{w}_1 + K_1 \dfrac{d}{d\tau} w_1^2 \overline{w}_1 \\ &=& \dot{w}_1 + K_1 + \left(\dfrac{\partial w_1^2 \overline{w}_1}{\partial w_1} \dot{w}_1 + \dfrac{\partial w_1^2 \overline{w}_1}{\partial \overline{w_1}} \dot{\overline{w}}_1 \right) \\ &=& (1 + 2K_1 |w_1|^2) \dot{w}_1 + K_1 w_1^2 \dot{\overline{w}}_1. \end{array}$$

Idem pour $\dot{v}_2$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans cette équation les formules pour w (25) et pour $\dot{w}$ (23). On obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{w}_1 &=& \lambda_1(\alpha)w_1 + \hat{G}_{2100}(\alpha)w_1^2\overline{w}_1 + \hat{G}_{1011}(\alpha)w_1w_2\overline{w}_2 \\ && + \hat{G}_{3200}(\alpha)w_1^3\overline{w}_1^2 + \hat{G}_{2111}(\alpha)w_1^2\overline{w}_1w_2\overline{w}_2 + \hat{G}_{1022}(\alpha)w_1^2w_2^2\overline{w}_2^2 \\ && + \mathcal{O}(\|w\|^6) \\ \dot{w}_2 &=& \lambda_2(\alpha)w_2 + \hat{H}_{1110}(\alpha)w_1\overline{w}_1w_2 + \hat{H}_{0021}(\alpha)w_2^2\overline{w}_2 \\ && + \hat{H}_{2210}(\alpha)w_1^2\overline{w}_1^2w_2 + \hat{H}_{1121}(\alpha)w_1\overline{w}_1w_2^2\overline{w}_2 + \hat{H}_{0032}(\alpha)w_2^3\overline{w}_2^2 \\ && + \mathcal{O}(\|w\|^6),\end{array}\right. \tag{26}$$

où les fonctions $\hat{G}_{jklm}(\alpha)$ sont définies par

$$\begin{aligned}\hat{G}_{2100} &= G_{2100} + \lambda_1 e_1 + (\lambda_1 + \overline{\lambda}_1)K_1 && (27)\\ \hat{G}_{1011} &= G_{1011} + \lambda_1 e_2 && (28)\\ \hat{G}_{3200} &= G_{3200} + G_{2100}e_1 + K_1(\overline{\lambda}_1 e_1 + \overline{G}_{2100}) - \overline{K}_1(\lambda_1 e_1 + G_{2100}) \\ &\quad - \overline{\lambda}_1(2K_1^2 + |K_1|^2) - 2\lambda_1 K_1^2 && (29)\\ \hat{G}_{2100} &= G_{2100} + G_{1011}e_1 + G_{2100}e_2 \\ &\quad + K_1(\lambda_1 e_2 + \overline{\lambda}_1 e_2 + G_{1011} + \overline{G}_{1011}) \\ &= 0 \\ \hat{G}_{1022} &= G_{1022} + G_{1011}e_2 - (\lambda_1 e_2 + G_{1011})|K_2|^2. && (30)\end{aligned}$$

Les fonctions $\hat{H}_{jklm}(\alpha)$ sont définies de façon similaire ; il suffit d'interchanger tous les indices pour les obtenir. Par exemple,

$$\begin{aligned}\hat{H}_{1110} &= H_{1110} + \lambda_2 e_1 && (31)\\ \hat{H}_{0021} &= H_{0021} + \lambda_2 e_2 + (\lambda_2 + \overline{\lambda}_2)K_2. && (32)\end{aligned}$$

Remarquez que K_1 et K_2 avaient été judicieusement choisis de façon à annuler $\hat{G}_{2100}$ et $\hat{H}_{0021}$. Afin d'obtenir la forme du système (22), il ne reste plus qu'à s'assurer que $\operatorname{Re}\hat{G}_{3200}$ et que $\operatorname{Re}\hat{H}_{0032}$ soient nuls.

Pour ce faire, considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl}F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to& \mathbb{R}^2 \\ (e,\alpha) &\mapsto& (\operatorname{Re}\hat{G}_{3200}(\alpha), \operatorname{Re}\hat{H}_{0032}(\alpha)),\end{array}$$

où les fonctions $\hat{G}_{3200}$ et $\hat{H}_{0032}$, qui dépendent de e et de α, sont définies par (29). En posant

$$e_0 = (e_{0_1}, e_{0_2}) = \left(-\frac{\operatorname{Re} G_{3200}(0)}{\operatorname{Re} G_{2100}(0)}, -\frac{\operatorname{Re} H_{0032}(0)}{\operatorname{Re} H_{0021}(0)}\right),$$

on remarque que

$$\begin{aligned}F_1(e_0, 0) &= \operatorname{Re}\hat{G}_{3200}(0) \\ &= \operatorname{Re} G_{3200}(0) + [\operatorname{Re} G_{2100}(0)]\, e_{0_1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[\mathrm{Re}\, K_1(0)\overline{\lambda}_1(0) - \overline{K}_1(0)\lambda_1(0)\right] e_{0_1} \\
&+ \left[\mathrm{Re}\, K_1(0)\overline{G}_{2100}(0) - \overline{K}_1(0)G_{2100}(0)\right] \\
&- 2\mathrm{Re}\,(\lambda_1(0) + \overline{\lambda}_1(0))K_1(0)^2 - |K_1(0)|^2 \mathrm{Re}\,\overline{\lambda}_1(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boxed{\mathrm{Re}\,\lambda_1(0) = 0 \Rightarrow} \quad &= \quad \mathrm{Re}\, G_{3200}(0) + [\mathrm{Re}\, G_{2100}(0)]\, e_{0_1} \\
&\quad + \left[-\mathrm{Im}\, K_1(0)\, \mathrm{Im}\, \overline{\lambda}_1(0) + \mathrm{Im}\, \overline{K}_1(0)\, \mathrm{Im}\, \lambda_1(0)\right] e_{0_1} \\
&\quad + \left[-\mathrm{Im}\, K_1(0)\, \mathrm{Im}\, \overline{G}_{2100}(0) + \mathrm{Im}\, \overline{K}_1(0)\, \mathrm{Im}\, G_{2100}(0)\right] \\
&= \quad \mathrm{Re}\, G_{3200}(0) + [\mathrm{Re}\, G_{2100}(0)]\, e_{0_1} \\
&\quad + [\mathrm{Im}\, K_1(0)\, \mathrm{Im}\, \lambda_1(0) - \mathrm{Im}\, K_1(0)\, \mathrm{Im}\, \lambda_1(0)]\, e_{0_1} \\
&\quad + [\mathrm{Im}\, K_1(0)\, \mathrm{Im}\, G_{2100}(0) - \mathrm{Im}\, K_1(0)\, \mathrm{Im}\, G_{2100}(0)] \\
&= \quad \mathrm{Re}\, G_{3200}(0) + [\mathrm{Re}\, G_{2100}(0)]\, e_{0_1} \\
&= \quad \mathrm{Re}\, G_{3200}(0) - \mathrm{Re}\, G_{2100}(0) \frac{\mathrm{Re}\, G_{3200}(0)}{\mathrm{Re}\, G_{2100}(0)} \\
&= \quad 0.
\end{aligned}
$$

De plus, on calcule

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial F}{\partial e}\right|_{(e_0,0)} &= \left(\begin{array}{cc} G_{2100} + (K_1\overline{\lambda}_1 + \overline{K}_1\lambda_1) & 0 \\ 0 & H_{21} + (K_2\overline{\lambda}_2 + \overline{K}_2\lambda_2) \end{array} \right)\Bigg|_{(e_0,0)} \\
&= \left(\begin{array}{cc} G_{2100} & 0 \\ 0 & H_{0021} \end{array} \right),
\end{aligned}
$$

d'où on en déduit que le déterminant du jacobien de F par rapport à e évalué au point $(e_0, 0)$ est non nul. D'après le théorème de la fonction implicite, il existe donc une fonction différentiable unique $e(\alpha)$ telle que $e(0) = e_0$ et $F(e(\alpha), \alpha) = 0$ pour $\|\alpha\|$ suffisamment petit. On peut donc choisir les fonctions $e_1(\alpha)$ et $e_2(\alpha)$ de façon à annuler les parties réelles des coefficients $\hat{G}_{3200}$ et $\hat{H}_{0032}$.

Ainsi, en posant

$$
\begin{aligned}
P_{11}(\alpha) &= \hat{G}_{2100}(\alpha) \\
P_{12}(\alpha) &= \hat{G}_{1011}(\alpha) \\
P_{21}(\alpha) &= \hat{H}_{1110}(\alpha) \\
P_{22}(\alpha) &= \hat{H}_{0021}(\alpha) \\
S_1(\alpha) &= \hat{G}_{1022}(\alpha) \\
S_2(\alpha) &= \hat{H}_{2210}(\alpha) \\
R_1(\alpha) &= \mathrm{Im}\, \hat{G}_{3200}(\alpha) \\
R_2(\alpha) &= \mathrm{Im}\, \hat{H}_{0032}(\alpha),
\end{aligned}
$$

le système d'équations (26) devient exactement le système (22). □

5.3 En coordonnées polaires

Afin d'étudier le système (22), transformons-le en coordonnées polaires.

Lemme 5.3. *Supposons que le jacobien* $D_\alpha(\mathrm{Re}\,\lambda(\alpha))$ *évalué à* $\alpha = 0$ *possède un déterminant* $\neq 0$. *Alors il existe des changements de variables et de paramètres qui transforment le système* (22) *en le système* (10) *pour* $\|\alpha\|$ *suffisamment petit. Les coefficients de* (10) *évalués en* $\mu = 0$ *sont donnés par*

$$p_{11}(0) = \mathrm{Re}\, G_{2100}(0) \tag{33}$$

$$p_{12}(0) = \mathrm{Re}\, G_{1011}(0) \tag{34}$$

$$p_{21}(0) = \mathrm{Re}\, H_{1110}(0) \tag{35}$$

$$p_{22}(0) = \mathrm{Re}\, H_{0021}(0) \tag{36}$$

$$\begin{aligned} s_1(0) = {} & \mathrm{Re}\, G_{1022}(0) + \mathrm{Re}\, G_{1011}(0) \left[\frac{\mathrm{Re}\, H_{1121}(0)}{\mathrm{Re}\, H_{1110}(0)} \right. \\ & \left. -2\frac{\mathrm{Re}\, H_{0032}(0)}{\mathrm{Re}\, H_{0021}(0)} - \frac{\mathrm{Re}\, G_{3200}(0)}{\mathrm{Re}\, G_{2100}(0)} \frac{\mathrm{Re}\, H_{0021}(0)}{\mathrm{Re}\, H_{1110}(0)} \right] \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} s_2(0) = {} & \mathrm{Re}\, H_{2210}(0) + \mathrm{Re}\, H_{1110}(0) \left[\frac{\mathrm{Re}\, G_{2111}(0)}{\mathrm{Re}\, G_{1011}(0)} \right. \\ & \left. -2\frac{\mathrm{Re}\, G_{3200}(0)}{\mathrm{Re}\, G_{2100}(0)} - \frac{\mathrm{Re}\, H_{0032}(0)}{\mathrm{Re}\, H_{0021}(0)} \frac{\mathrm{Re}\, G_{2100}(0)}{\mathrm{Re}\, G_{1011}(0)} \right]. \end{aligned} \tag{38}$$

De plus, les conditions imposées au lemme 5.2 impliquent que $p_{ij}(0) \neq 0$.

Démonstration:

Effectuons d'abord le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_1 & = & r_1 e^{i\varphi_1} \\ v_2 & = & r_2 e^{i\varphi_2}, \end{array} \right.$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \dot{r}_1 e^{i\varphi_1} + i r_1 \dot{\varphi}_1 e^{i\varphi_1} \\ &= e^{i\varphi_1}(\dot{r}_1 + i r_1 \dot{\varphi}_1). \end{aligned} \tag{39}$$

Or, d'après (22),

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \lambda_1 v_1 + P_{11} v_1 |v_1|^2 + P_{12} v_1 |v_2|^2 + i R_1 v_1 |v_1|^4 + S_1 v_1 |v_2|^4 + \mathcal{O}(\|v\|^6) \\ &= e^{i\varphi_1} \left(\lambda_1 r_1 + P_{11} r_1^3 + P_{12} r_1 r_2^2 + i R_1 r_1^5 + S_1 r_1 r_2^4 + e^{-i\varphi_1} \mathcal{O}(\|r\|^6) \right) \end{aligned} \tag{40}$$

Ainsi, en égalant (39) et (40), et en posant $p_{ij} = \mathrm{Re}\, P_{ij}$ et $s_i = \mathrm{Re}\, S_i$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{v}_1 & = & r_1 \left(\mathrm{Re}\, \lambda_1(\alpha) + p_{11}(\alpha) r_1^2 + p_{12}(\alpha) r_2^2 + s_1(\alpha) r_2^4 \right) + \mathcal{O}(\|r\|^6) \\ r_1 \dot{\varphi}_1 & = & r_1 \mathrm{Im}\, \lambda_1(\alpha) + \mathcal{O}(\|r\|^2). \end{array} \right. \tag{41}$$

Les formules pour les coefficients p_{ij} et s_i se calculent à partir des formules (27), (28) et (30).

Écrivons maintenant $\lambda_1(\alpha) = \mu_1(\alpha) + i\omega_1(\alpha)$, où $\mu_1(0) = 0$ par hypothèse. Puisque $\det(D\mu)(0) \neq 0$ par hypothèse, on peut exprimer localement μ en fonction de α. Ainsi on peut effectuer un changement de paramètre pour transformer

le système (41) en

$$\begin{cases} \dot{v}_1 &= r_1\left(\mu_1 + p_{11}(\mu)r_1^2 + p_{12}(\mu)r_2^2 + s_1(\mu)r_2^4\right) + \mathcal{O}(\|r\|^6) \\ r_1\dot{\varphi}_1 &= r_1\omega_1(\mu) + \mathcal{O}(\|r\|^2). \end{cases}$$

En effectuant le même processus pour v_2, on retrouve le système d'équations (10). □

Les résultats obtenus dans les premières sections s'appliquent donc au système (11) si certaines conditions de non-dégénérescence sont satisfaites.

6 En coordonnées cartésiennes

Considérons maintenant le système général suivant :

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \tag{42}$$

où $x \in \mathbb{R}^4$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$ est un paramètre, où f est de classe $\mathcal{C}^7$ en x et $\mathcal{C}^1$ en α et où le jacobien de f (par rapport à x) possède les valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_{1,4}(\alpha) &= \mu_1(\alpha) \pm i\omega_1(\alpha) \\ \lambda_{2,3}(\alpha) &= \mu_2(\alpha) \pm i\omega_2(\alpha), \end{aligned}$$

où les fonctions réelles μ_i et les fonctions réelles positives ω_i sont différentiables en α.

6.1 Cas général

Le lemme suivant nous permet d'appliquer les résultats de sections précédentes au système général (42) :

Lemme 6.1. *Si le système* (42) *possède un point d'équilibre* x_0 *et que pour une certaine valeur* α_0*, les valeurs propres du jacobien de* f *soient purement imaginaires :*

$$\begin{aligned} \lambda_{1,4}(\alpha_0) &= \pm i\omega_1(\alpha_0) \qquad \omega_1(\alpha_0) > 0 \\ \lambda_{2,3}(\alpha_0) &= \pm i\omega_2(\alpha_0) \qquad \omega_2(\alpha_0) > 0, \end{aligned}$$

alors il est possible d'effectuer un changement de coordonnées et de paramètres qui transforment le système (42) *en le système* (11)*.*

Démonstration:

On peut supposer sans perdre de généralité que $\alpha_0 = 0$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de translater le paramètre α en posant

$$\alpha' = \alpha - \alpha_0.$$

Ainsi, $f(x_0, 0) = 0$. De plus, par hypothèse,

$$\det D_x f(x_0, 0) = \omega_1(0)^2 \omega_2(0)^2 \neq 0.$$

Ainsi, d'après le théorème de la fonction implicite, il existe, pour $\|\alpha\|$ suffisamment petit, une unique fonction $X(\alpha)$ telle que $X(0) = x_0$ et que $f(X(\alpha), \alpha) = 0$.

On peut donc définir localement le changement de variable (dépendant de α) inversible suivant :

$$y = x - X(\alpha),$$

ce qui nous donne, en développant f en série de Taylor au point $x = X(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x} \\
&= f(X(\alpha), \alpha) + D_x f(X(\alpha), \alpha) \cdot (x - X(\alpha)) + \mathcal{O}(\|x - X(\alpha)\|^2) \\
&= D_y f(0, \alpha) \frac{dy}{dx} \cdot y + \mathcal{O}(\|y\|^2) \\
&= \underbrace{D_y f(0, \alpha)}_{A(\alpha)} \cdot y + F(y, \alpha). \qquad (43)
\end{aligned}$$

Puisque les valeurs propres de $A(\alpha)$ sont distinctes, alors il existe des vecteurs propres $q_{1,2}(\alpha) \in \mathbb{C}^4$ tels que

$$A(\alpha) q_i(\alpha) = \lambda_i(\alpha) q_i(\alpha)$$

et des vecteurs propres $p_{1,2}(\alpha) \in \mathbb{C}^4$ tels que

$$A^\top(\alpha) p_i(\alpha) = \overline{\lambda}_i(\alpha) p_i(\alpha).$$

Notez que

$$\overline{\lambda_i} \langle p_j, q_i \rangle = \langle p_j, \lambda_i q_i \rangle = \langle p_j, A q_i \rangle = \langle A^\top p_j, q_i \rangle = \overline{\lambda_j} \langle p_j, q_i \rangle \qquad (44)$$

et que

$$\lambda_j \langle \overline{p_j}, q_i \rangle = \langle \lambda_j \overline{p}_j, q_i \rangle = \langle A^\top \overline{p}_j, q_i \rangle = \langle p_j, A q_i \rangle = \overline{\lambda_i} \langle \overline{p_j}, q_i \rangle, \qquad (45)$$

où

$$\langle p_j, q_i \rangle = \sum_{k=1}^{4} p_{i_k} \overline{q}_{j_k}$$

est le produit scalaire habituel dans $\mathbb{C}^4$. Puisque $\omega_1(0) \neq \omega_2(0)$, alors (44) implique que

$$\langle p_2, q_1 \rangle = \langle p_1, q_2 \rangle = \langle q_2, p_1 \rangle = \langle q_1, p_2 \rangle = 0$$

et (45) implique que

$$\langle \overline{p}_j, q_i \rangle = \langle p_j, \overline{q}_i \rangle = \langle \overline{q}_i, p_j \rangle = \langle q_i, \overline{p}_j \rangle = 0.$$

Pour $\|\alpha\|$ suffisamment petit, les valeurs propres de A sont distinctes. Ainsi, les vecteurs propres q_1, q_2, $\overline{q}_2$ et $\overline{q}_1$ sont linéairement indépendants et on peut effectuer le changement de base

$$y = z_1 q_1 + z_2 q_2 + z_3 \overline{q}_2 + z_4 \overline{q}_1.$$

Immédiatement, on en déduit que $\langle q_1, p_1 \rangle \neq 0$ car il existe des constantes γ_k, $k = 1, 2, 3, 4$ telles que $p_1 = \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_3 \overline{q}_2 + \gamma_4 \overline{q}_1$, d'où

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \langle q_1, p_1 \rangle &= \gamma_1 \langle q_1, p_1 \rangle + 0 + 0 + 0 \\
&= \gamma_1 \langle q_1, p_1 \rangle + \gamma_2 \langle q_2, p_1 \rangle + \gamma_3 \langle \overline{q}_2, p_1 \rangle + \gamma_4 \langle \overline{q}_1, p_1 \rangle \\
&= \langle \gamma_1 q_1 + \gamma_2 q_2 + \gamma_3 \overline{q}_2 + \gamma_4 \overline{q}_1, p_1 \rangle \\
&= \langle p_1, p_1 \rangle \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique à $\langle q_2, p_2 \rangle$. Cette condition nous permet d'effectuer les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 z_1 + 0 z_2 + 0 z_3 + 0 z_4 \\
&= z_1 \frac{\langle q_1, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} + z_2 \frac{\langle q_2, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} + z_3 \frac{\langle \overline{q}_2, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} + z_4 \frac{\langle \overline{q}_1, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle z_1 q_1, p_1 \rangle + \langle z_2 q_2, p_1 \rangle + \langle z_3 \overline{q}_2, p_1 \rangle + \langle z_4 \overline{q}_1, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle z_1 q_1 + z_2 q_2 + z_3 \overline{q}_2 + z_4 \overline{q}_1, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle y, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
z_4 &= 0 z_1 + 0 z_2 + 0 z_3 + 1 z_4 \\
&= z_1 \frac{\langle p_1, q_1 \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} + z_2 \frac{\langle p_1, q_2 \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} + z_3 \frac{\langle p_1, \overline{q}_2 \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} + z_4 \frac{\langle p_1, \overline{q}_1 \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1, \overline{z}_1 q_1 \rangle + \langle p_1, \overline{z}_2 q_2 \rangle + \langle p_1, \overline{z}_3 \overline{q}_2 \rangle + \langle p_1, \overline{z}_4 \overline{q}_1 \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1, \overline{y} \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1, y \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} \\
&= \overline{z}_1.
\end{aligned}$$

En d'autres mots, le changement de base équivaut à effectuer le changement de variables

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\langle y, p_1(\alpha) \rangle}{\langle q_1(\alpha), p_1(\alpha) \rangle} \in \mathbb{C} \\
z_2 &= \frac{\langle y, p_2(\alpha) \rangle}{\langle q_2(\alpha), p_2(\alpha) \rangle} \in \mathbb{C},
\end{aligned}$$

où

$$y = z_1 q_1(\alpha) + \overline{z}_1 \overline{q}_1(\alpha) + z_2 q_2(\alpha) + \overline{z}_2 \overline{q}_2(\alpha) \ \in \ \mathbb{R}^4.$$

Ce changement de variables transforme le système (43), exprimé en coordonnées cartésiennes, au système suivant, en coordonnées complexes :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \frac{\langle \dot{y}, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle Ay + F(y,\alpha), p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle A(z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1 + z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2), p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} \\
&\quad + \frac{\langle F(z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1 + z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2, \alpha), p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} \\
&= \lambda_1 z_1 \frac{\langle q_1, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} + \overline{\lambda}_1 \overline{z}_1 \frac{\langle \overline{q}_1, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} + \lambda_2 z_2 \frac{\langle q_2, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} + \overline{\lambda}_2 \overline{z}_2 \frac{\langle \overline{q}_2, p_1 \rangle}{\langle q_1, p_1 \rangle} \\
&\quad + g(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \alpha) \\
&= \lambda_1(\alpha) z_1 + g(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \alpha) \\
\dot{z}_2 &= \lambda_2(\alpha) z_2 + h(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \alpha),
\end{aligned}$$

où les fonctions complexes g et h sont $\mathcal{O}(\|z\|^4)$ et de classe $\mathcal{C}^5$ en z, $\mathcal{C}^1$ en α. Il ne reste plus qu'à vérifier que

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{z}}_1 &= \frac{\langle p_1, \dot{y} \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1, A(z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1 + z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2) \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} \\
&\quad + \frac{\langle p_1, F(z_1 q_1 + \overline{z}_1 \overline{q}_1 + z_2 q_2 + \overline{z}_2 \overline{q}_2, \alpha) \rangle}{\langle p_1, q_1 \rangle} \\
&= \overline{\lambda}_1(\alpha) \overline{z}_1 + \overline{g}(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \alpha) \\
&= \dot{\overline{z}}_1.
\end{aligned}$$

Nous avons donc exactement le système (11). □

Mentionnons que le cas général où $x \in \mathbb{R}^n$ peut se réduire au cas $n = 4$ en appliquant le théorème de la variété du centre.

6.2 Conclusion

Terminons en rappelant toutes les conditions de non dégénérescence imposées au fil des changements de variables, exprimées en fonction des valeurs propres et des coefficients de la forme normale évalués au paramètre critique $\alpha = \alpha_0$:

1. Les valeurs propres $\lambda_1(\alpha_0) = i\omega_1(\alpha_0)$ et $\lambda_2(\alpha_0) = i\omega_2(\alpha_0)$ ne sont pas en résonance 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5 ou 2 : 3. Cette condition est

requise pour la transformation (jusqu'à l'ordre 5) en forme normale de Poincaré-Birkhoff.

2. Les coefficients d'ordre 3 dans la forme normale ont leur partie réelle non nulle : Re $G_{2100} \neq 0$, Re $G_{1011} \neq 0$, Re $H_{1110} \neq 0$ et Re $H_{0021} \neq 0$. Ces conditions sont requises pour simplifier au maximum la forme normale.
3. L'application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$, où $\mu(\alpha)$ est la partie réelle des valeurs propres $\lambda_{1,2}(\alpha)$, possède un jacobien inversible en $\alpha = \alpha_0$. Cette condition garantit l'existence locale d'une fonction inverse et est requise pour effectuer le changement de paramètre de α à μ.
4. $\delta\theta \neq 1$. Remarquez que cette condition est équivalente à

$$\det \begin{pmatrix} \text{Re}\, G_{2100} & \text{Re}\, G_{1011} \\ \text{Re}\, H_{1110} & \text{Re}\, H_{0021} \end{pmatrix} \neq 0.$$

   Sans cette condition, le point d'équilibre ξ_C dans les systèmes d'amplitudes (1) et (3) n'existerait pas.
5. Si Re G_{2100} et Re H_{0021} sont de signe contraire (en $\alpha = \alpha_0$), alors Re $G_{2100} \neq$ Re G_{1011} et Re $H_{0021} \neq$ Re H_{1110}. Ces conditions sont nécessaires pour éviter que la courbe de bifurcation de Hopf pour le point d'équilibre ξ_C des systèmes (1) et (3) ne soit pas confondue avec une des courbes de bifurcation du point d'équilibre ξ_0 à l'origine.
6. Finalement, toujours si Re G_{2100} et Re H_{0021} sont de signe contraire, $p_{21}p_{22}(p_{21} - p_{11})s_1 + p_{11}p_{12}(p_{12} - p_{22})s_2 \neq 0$, où les p_{ij} et les s_i peuvent être exprimés en fonction des G_{jklm} et des H_{jklm} à l'aide des formules (33) à (38). Ces conditions permettent d'éviter la dégénérescence de la bifurcation de Hopf au point ξ_C dans les systèmes d'amplitudes (1) et (3).

Remarquez que les trois dernières conditions s'appliquent aux systèmes d'amplitudes tirés de la forme tronquée (8) du système (10), et que ces deux systèmes ne sont pas localement topologiquement équivalents.

C'est ainsi que se termine notre étude de la bifurcation de Hopf-Hopf sans résonance.

References

[1] S.-N. Chow, C. Li, and D. Wang. *Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press, 1994.

[2] N. Gavrilov. On bifurcations of an equilibrum with two pairs of pure imaginary roots. *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations*, pages 17–30, 1980. En russe.

[3] Paul Glendinning. *Stability, Instability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*, chapter 5, pages 129–130. Cambridge University Press, 1994 (Third printing 1996).

[4] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, chapter 7, pages 396–411. Springer-Verlag, 1983 (Third printing 1990).

[5] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, chapter 3 and 8, pages 79–102, 305–336. Springer-Verlag, 1995.

[6] Floris Takens. Singularities of vector fields. *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.*, 43:47–100, 1974.

[7] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, chapter 2, pages 211–224. Springer-Verlag, 1990.

[8] Henryk Zoladek. Bifurcations of certain family of planar vector fields tangent to axes. *Journal of Differential Equations*, 67:1–55, 1987.

La méthodologie et la notation de cet article sont fortement inspirées de Kuznetsov [5], qui lui-même suit de très près Gavrilov [2], que je n'ai malheureusement pu consulter. En fait, les sections 5 et 6 proviennent de [5] ; je n'ai fait qu'ajouter de nombreux détails. Wiggins [7] fut particulièrement utile pour la compréhension de la forme normale de Poincaré-Birkhoff. Les diagrammes de phase et de bifurcation des deux premières sections sont donnés par Kuznetsov [5] et par Guckenheimer & Holmes [4]. Les diagrammes de phase dégénérés ($\mu = 0$) sont analysés par Takens [6]. Le critère de Dulac est énoncé (et démontré) dans [3]. Finalement, mentionnons que [1], [2], [6] et [8] ne sont donnés qu'à titre de références ; je ne les ai pas étudié en profondeur avant de rédiger cet article.